Groupes de Brauer

Rafael GUGLIELMETTI

Sous la direction d'Alexei Skorobogatov et Eva Bayer

17 juillet 2012

Plan

Les algèbres

Définition (Algèbre sur un corps)

Une algèbre A sur un corps k est une structure algébrique $(A, +, \cdot, \times)$ telle que:

- $(A, +, \cdot)$ *soit un k-espace vectoriel;*
- *l'application $A \times A \longrightarrow A, (a, b) \longmapsto a \times b$ est bilinéaire et associative;*
- *k est dans le centre de A.*

Convention

Toutes les algèbres que l'on considère sont de dimension finie.

Les algèbres

Définition (Algèbre sur un corps)

Une algèbre A sur un corps k est une structure algébrique $(A, +, \cdot, \times)$ telle que:

- $(A, +, \cdot)$ *soit un k-espace vectoriel;*
- *l'application $A \times A \longrightarrow A, (a, b) \longmapsto a \times b$ est bilinéaire et associative;*
- *k est dans le centre de A.*

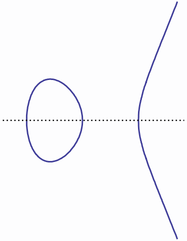
Convention

Toutes les algèbres que l'on considère sont de dimension finie.

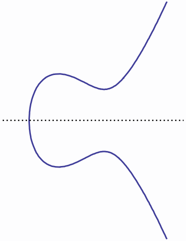
Les schémas

La notion de *schéma* (inventée dans les années 1960) permet de généraliser la notion de *variété algébrique*. Toute variété algébrique (i.e. sous-ensemble de k^n défini par un ensemble de polynômes à n variables) peut être vue comme un schéma.

Exemple (Courbes elliptiques)



$y^2 = x^3 - 2x$

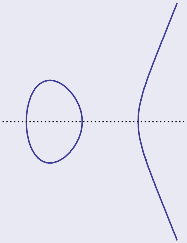


$y^2 = x^3 - x + 1$

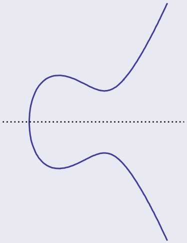
Les schémas

La notion de *schéma* (inventée dans les années 1960) permet de généraliser la notion de *variété algébrique*. Toute variété algébrique (i.e. sous-ensemble de k^n défini par un ensemble de polynômes à n variables) peut être vue comme un schéma.

Exemple (Courbes elliptiques)



$$y^2 = x^3 - 2x$$



$$y^2 = x^3 - x + 1$$

Plan

Plan

Le groupe de Brauer d'un corps

On peut associer à tout corps k un groupe abélien appelé *groupe de Brauer de k*. Ce groupe classifie les algèbres centrales simples de dimension finie sur k. Il y a trois définitions équivalentes de ce groupe:

- via le théorème de Wedderburn (approche classique);
- comme un "premier groupe de cohomologie": $H^1(\mathrm{Gal}(k_s, k), \mathrm{PGL}_\infty(k_s))$;
- comme un deuxième groupe de cohomologie: $H^2(\mathrm{Gal}(k_s, k), k_s{}^*)$, où k_s est une clôture séparable de k.

Le groupe de Brauer d'un corps

On peut associer à tout corps k un groupe abélien appelé *groupe de Brauer de k*. Ce groupe classifie les algèbres centrales simples de dimension finie sur k. Il y a trois définitions équivalentes de ce groupe:

- via le théorème de Wedderburn (approche classique);
- comme un "premier groupe de cohomologie": $H^1\left(\mathrm{Gal}(k_s, k), \mathrm{PGL}_\infty(k_s)\right)$;
- comme un deuxième groupe de cohomologie: $H^2\left(\mathrm{Gal}(k_s, k), {k_s}^*\right)$, où k_s est une clôture séparable de k.

Le groupe de Brauer d'un corps

On peut associer à tout corps k un groupe abélien appelé *groupe de Brauer de* k. Ce groupe classifie les algèbres centrales simples de dimension finie sur k. Il y a trois définitions équivalentes de ce groupe:

- via le théorème de Wedderburn (approche classique);
- comme un "premier groupe de cohomologie": $H^1\left(\mathrm{Gal}(k_s, k), \mathrm{PGL}_\infty(k_s)\right)$;
- comme un deuxième groupe de cohomologie: $H^2\left(\mathrm{Gal}(k_s, k), {k_s}^*\right)$, où k_s est une clôture séparable de k.

Le groupe de Brauer d'un schéma

On peut associer à tout schéma X deux groupes abéliens:

- Le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ de X, qui classifie les algèbres d'Azumaya (généralisation des algèbres centrales simples).
- Le groupe de Brauer cohomologique (ou groupe de Brauer-Grothendieck).

Ces deux groupes (différents en général) sont utile en géométrie arithmétique (équations diophantiennes par exemple).

Le groupe de Brauer d'un schéma

On peut associer à tout schéma X deux groupes abéliens:

- Le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ de X, qui classifie les algèbres d'Azumaya (généralisation des algèbres centrales simples).
- Le groupe de Brauer cohomologique (ou groupe de Brauer-Grothendieck).

Ces deux groupes (différents en général) sont utile en géométrie arithmétique (équations diophantiennes par exemple).

Plan

Les équations diophantiennes I

Définition (Equation diophantienne)

Une équation diophantienne est une équation polynômiale dont les solutions cherchées sont entières.

- Déterminer si une telle équation possède une solution (non-triviale) ou non est un problème difficile (théorème de Fermat, ...).
- Il n'existe pas d'algorithme qui permette de dire si une équation diophantienne possède une solution ou non (réponse négative au dixième problème de Hilbert, en 1970).

Le problème reste ouvert pour la recherche de solutions rationnelles!

Les équations diophantiennes I

Définition (Equation diophantienne)

Une équation diophantienne est une équation polynômiale dont les solutions cherchées sont entières.

- Déterminer si une telle équation possède une solution (non-triviale) ou non est un problème difficile (théorème de Fermat, ...).
- Il n'existe pas d'algorithme qui permette de dire si une équation diophantienne possède une solution ou non (réponse négative au dixième problème de Hilbert, en 1970).

Le problème reste ouvert pour la recherche de solutions rationnelles!

Les équations diophantiennes I

Définition (Equation diophantienne)

Une équation diophantienne est une équation polynômiale dont les solutions cherchées sont entières.

- Déterminer si une telle équation possède une solution (non-triviale) ou non est un problème difficile (théorème de Fermat, ...).
- Il n'existe pas d'algorithme qui permette de dire si une équation diophantienne possède une solution ou non (réponse négative au dixième problème de Hilbert, en 1970).

Le problème reste ouvert pour la recherche de solutions rationnelles!

Les équations diophantiennes II

Une *condition nécessaire* pour qu'une équation diophantienne possède une solution dans $\mathbb{Q}$ est qu'elle possède une solution dans tous les $\mathbb{Q}_p$ et dans $\mathbb{R}$ (i.e. dans toutes les complétions de $\mathbb{Q}$).

La question qui se pose alors est de savoir si cette condition est *suffisante*.

- Elle l'est pour les polynômes homogènes de degré 2 (théorème de Hasse-Minkowski).
- Elle ne l'est pas pour l'équation

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0.$$

Les équations diophantiennes II

Une *condition nécessaire* pour qu'une équation diophantienne possède une solution dans $\mathbb{Q}$ est qu'elle possède une solution dans tous les $\mathbb{Q}_p$ et dans $\mathbb{R}$ (i.e. dans toutes les complétions de $\mathbb{Q}$).
La question qui se pose alors est de savoir si cette condition est *suffisante*.

- Elle l'est pour les polynômes homogènes de degré 2 (théorème de Hasse-Minkowski).
- Elle ne l'est pas pour l'équation

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0.$$

Les équations diophantiennes II

Une *condition nécessaire* pour qu'une équation diophantienne possède une solution dans $\mathbb{Q}$ est qu'elle possède une solution dans tous les $\mathbb{Q}_p$ et dans $\mathbb{R}$ (i.e. dans toutes les complétions de $\mathbb{Q}$).
La question qui se pose alors est de savoir si cette condition est *suffisante*.

- Elle l'est pour les polynômes homogènes de degré 2 (théorème de Hasse-Minkowski).
- Elle ne l'est pas pour l'équation

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0.$$

Reformulation du problème et principe de Hasse

Soit V une variété algébrique définie sur $\mathbb{Q}$. L'existence de solutions rationnelles revient à demander à ce que $V(\mathbb{Q})$ soit non-vide.

Définition (Variété satisfaisant le principe de Hasse)

Si l'implication

$$V(\mathbb{R}) \neq \emptyset, \ V(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset, \ \forall p \in \mathbb{P} \Rightarrow V(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

est satisfaite, on dit que V satisfait le principe de Hasse.

Reformulation du problème et principe de Hasse

Soit V une variété algébrique définie sur $\mathbb{Q}$. L'existence de solutions rationnelles revient à demander à ce que $V(\mathbb{Q})$ soit non-vide.

Définition (Variété satisfaisant le principe de Hasse)

Si l'implication

$$V(\mathbb{R}) \neq \emptyset,\ \ V(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset,\ \forall p \in \mathbb{P} \Rightarrow V(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

est satisfaite, on dit que V satisfait le principe de Hasse.

Obstruction de Manin I

- Pendant longtemps, il n'existait pas de lien entre les différents contre-exemples au principe de Hasse.
- En 1970, Yuri Manin présente l'*obstruction de Manin*.
- Pendant quelques années, tous les contre-exemples au principe de Hasse sont expliqués par l'obstruction de Manin.
- Alexei Skorobogatov a présenté un contre-exemple au principe de Hasse qui n'est pas expliqué par l'obstruction de Manin.

Obstruction de Manin I

- Pendant longtemps, il n'existait pas de lien entre les différents contre-exemples au principe de Hasse.
- En 1970, Yuri Manin présente l'*obstruction de Manin*.
- Pendant quelques années, tous les contre-exemples au principe de Hasse sont expliqués par l'obstruction de Manin.
- Alexei Skorobogatov a présenté un contre-exemple au principe de Hasse qui n'est pas expliqué par l'obstruction de Manin.

Obstruction de Manin I

- Pendant longtemps, il n'existait pas de lien entre les différents contre-exemples au principe de Hasse.
- En 1970, Yuri Manin présente l'*obstruction de Manin*.
- Pendant quelques années, tous les contre-exemples au principe de Hasse sont expliqués par l'obstruction de Manin.
- Alexei Skorobogatov a présenté un contre-exemple au principe de Hasse qui n'est pas expliqué par l'obstruction de Manin.

Obstruction de Manin I

- Pendant longtemps, il n'existait pas de lien entre les différents contre-exemples au principe de Hasse.
- En 1970, Yuri Manin présente l'*obstruction de Manin*.
- Pendant quelques années, tous les contre-exemples au principe de Hasse sont expliqués par l'obstruction de Manin.
- Alexei Skorobogatov a présenté un contre-exemple au principe de Hasse qui n'est pas expliqué par l'obstruction de Manin.

Obstruction de Manin II

- Dans un certain nombre de cas, l'obstruction de Manin est la *seule obstruction* au principe de Hasse.
- On est amenés à calculer cette obstruction.
- Cela se fait via le groupe de Brauer-Grothendieck de la variété.

Obstruction de Manin II

- Dans un certain nombre de cas, l'obstruction de Manin est la *seule obstruction* au principe de Hasse.
- On est amenés à calculer cette obstruction.
- Cela se fait via le groupe de Brauer-Grothendieck de la variété.

Obstruction de Manin II

- Dans un certain nombre de cas, l'obstruction de Manin est la *seule obstruction* au principe de Hasse.
- On est amenés à calculer cette obstruction.
- Cela se fait via le groupe de Brauer-Grothendieck de la variété.

Plan

Algèbre centrale simple

Définition (Algèbre centrale simple)

Une k-algèbre A est centrale simple si $Z(A) = k$ et si le seul idéal bilatère propre de A est l'idéal trivial.

Exemples

- $\mathrm{M}_n(k)$;
- quaternions de Hammilton.

Proposition

Une k-algèbre A est centrale simple si et seulement s'il existe une extension séparable de dimension finie K de k et un entier n tels que

$$A \otimes_k K \cong \mathrm{M}_n(K).$$

Algèbre centrale simple

Définition (Algèbre centrale simple)

Une k-algèbre A est centrale simple si $Z(A) = k$ et si le seul idéal bilatère propre de A est l'idéal trivial.

Exemples

- $\mathrm{M}_n(k)$;
- quaternions de Hammilton.

Proposition

Une k-algèbre A est centrale simple si et seulement s'il existe une extension séparable de dimension finie K de k et un entier n tels que

$$A \otimes_k K \cong \mathrm{M}_n(K).$$

Algèbre centrale simple

Définition (Algèbre centrale simple)

Une k-algèbre A est centrale simple si $Z(A) = k$ et si le seul idéal bilatère propre de A est l'idéal trivial.

Exemples

- $\mathrm{M}_n(k)$;
- quaternions de Hammilton.

Proposition

Une k-algèbre A est centrale simple si et seulement s'il existe une extension séparable de dimension finie K de k et un entier n tels que

$$A \otimes_k K \cong \mathrm{M}_n(K).$$

Construction du groupe de Brauer I

Définition (Algèbre équivalentes)

Deux algèbres centrales simples A et A' sur k sont dites équivalentes (ou Brauer équivalentes) s'il existe deux entiers n et n' tels que

$$A \otimes_k \mathrm{M}_n(k) \cong A' \otimes_k \mathrm{M}_{n'}(k).$$

La relation d'être “Brauer équivalent” est une relation d'équivalence sur l'ensemble des algèbre centrales simples sur un corps k.

Remarque

Cette relation est équivalente à celle habituellement définie via le théorème de Wedderburn.

Construction du groupe de Brauer I

Définition (Algèbre équivalentes)

Deux algèbres centrales simples A et A' sur k sont dites équivalentes (ou Brauer équivalentes) s'il existe deux entiers n et n' tels que

$$A \otimes_k \mathrm{M}_n(k) \cong A' \otimes_k \mathrm{M}_{n'}(k).$$

La relation d'être "Brauer équivalent" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des algèbre centrales simples sur un corps k.

Remarque

Cette relation est équivalente à celle habituellement définie via le théorème de Wedderburn.

Construction du groupe de Brauer I

Définition (Algèbre équivalentes)

Deux algèbres centrales simples A et A' sur k sont dites équivalentes (ou Brauer équivalentes) s'il existe deux entiers n et n' tels que

$$A \otimes_k \mathrm{M}_n(k) \cong A' \otimes_k \mathrm{M}_{n'}(k).$$

La relation d'être "Brauer équivalent" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des algèbre centrales simples sur un corps k.

Remarque

Cette relation est équivalente à celle habituellement définie via le théorème de Wedderburn.

Construction du groupe de Brauer II

Soit $\mathrm{Br}(k)$ l'ensemble des classes d'équivalence. Le produit tensoriel induit une structure de groupe abélien sur $\mathrm{Br}(k)$:

- l'élément neutre est la classe de $k \cong \mathrm{M}_1(k)$;
- l'inverse d'une algèbre est A^{op}.

Définition (Groupe de Brauer de k)

Le groupe $\mathrm{Br}(k)$ *est appelé groupe de Brauer de* k.

Remarque

Il s'agit d'un foncteur covariant de la catégorie des corps dans la catégorie des groupes abéliens (via le produit tensoriel).

Construction du groupe de Brauer II

Soit $\mathrm{Br}(k)$ l'ensemble des classes d'équivalence. Le produit tensoriel induit une structure de groupe abélien sur $\mathrm{Br}(k)$:

- l'élément neutre est la classe de $k \cong \mathrm{M}_1(k)$;
- l'inverse d'une algèbre est A^{op}.

Définition (Groupe de Brauer de k)

Le groupe $\mathrm{Br}(k)$ *est appelé groupe de Brauer de* k.

Remarque

Il s'agit d'un foncteur covariant de la catégorie des corps dans la catégorie des groupes abéliens (via le produit tensoriel).

Construction du groupe de Brauer II

Soit $\mathrm{Br}(k)$ l'ensemble des classes d'équivalence. Le produit tensoriel induit une structure de groupe abélien sur $\mathrm{Br}(k)$:

- l'élément neutre est la classe de $k \cong \mathrm{M}_1(k)$;
- l'inverse d'une algèbre est A^{op}.

Définition (Groupe de Brauer de k)

Le groupe $\mathrm{Br}(k)$ *est appelé groupe de Brauer de* k.

Remarque

Il s'agit d'un foncteur covariant de la catégorie des corps dans la catégorie des groupes abéliens (via le produit tensoriel).

Exemples de groupes de Brauer

Exemple (Corps algébriquement clos)

Soit k un corps algébriquement clos et A une algèbre centrale simple sur k. Le théorème de Wedderburn implique qu'il existe un entier n tel que $A \cong \mathrm{M}_n(k)$. Ainsi, on a $\mathrm{Br}(k) = 0$.

Exemple (Corps finis)

Le petit théorème de Wedderburn (tout corps gauche fini est commutatif) implique que le groupe de Brauer d'un corps fini est trivial.

Exemples de groupes de Brauer

Exemple (Corps algébriquement clos)

Soit k un corps algébriquement clos et A une algèbre centrale simple sur k. Le théorème de Wedderburn implique qu'il existe un entier n tel que $A \cong \mathrm{M}_n(k)$. Ainsi, on a $\mathrm{Br}(k) = 0$.

Exemple (Corps finis)

Le petit théorème de Wedderburn (tout corps gauche fini est commutatif) implique que le groupe de Brauer d'un corps fini est trivial.

Le groupe de Brauer cohomologique

Proposition

On peut montrer l'isomorphisme suivant:

$$\mathrm{Br}(k) = H^2(\mathrm{Gal}(k_s, k), {k_s}^*) = \varinjlim_{K} H^2(\mathrm{Gal}(K, k), K^*).$$

Intérêt:

- Certains résultats sont connus dans le cas des extensions finies et passent à la limite: $\mathrm{Br}(k)$ est de torsion.
- En particulier, si A est une algèbre centrale simple, il existe des entiers n et m tels que

$$\underbrace{A \otimes_k \ldots \otimes_k A}_{n} \cong \mathrm{M}_m(k).$$

- Calculs: $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = C_2$, $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$, groupe de Brauer des corps finis.

Le groupe de Brauer cohomologique

Proposition

On peut montrer l'isomorphisme suivant:

$$\mathrm{Br}(k) = H^2(\mathrm{Gal}(k_s, k), {k_s}^*) = \varinjlim_{K} H^2(\mathrm{Gal}(K, k), K^*).$$

Intérêt:

- Certains résultats sont connus dans le cas des extensions finies et passent à la limite: $\mathrm{Br}(k)$ est de torsion.
- En particulier, si A est une algèbre centrale simple, il existe des entiers n et m tels que

$$\underbrace{A \otimes_k \ldots \otimes_k A}_{n} \cong \mathrm{M}_m(k).$$

- Calculs: $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = C_2$, $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$, groupe de Brauer des corps finis.

Le groupe de Brauer cohomologique

Proposition

On peut montrer l'isomorphisme suivant:

$$\mathrm{Br}(k) = H^2(\mathrm{Gal}(k_s, k), {k_s}^*) = \varinjlim_{K} H^2(\mathrm{Gal}(K, k), K^*).$$

Intérêt:

- Certains résultats sont connus dans le cas des extensions finies et passent à la limite: $\mathrm{Br}(k)$ est de torsion.
- En particulier, si A est une algèbre centrale simple, il existe des entiers n et m tels que

$$\underbrace{A \otimes_k \ldots \otimes_k A}_{n} \cong \mathrm{M}_m(k).$$

- Calculs: $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = C_2$, $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$, groupe de Brauer des corps finis.

Le groupe de Brauer cohomologique

Proposition

On peut montrer l'isomorphisme suivant:

$$\mathrm{Br}(k) = H^2(\mathrm{Gal}(k_s, k), {k_s}^*) = \varinjlim_{K} H^2(\mathrm{Gal}(K, k), K^*).$$

Intérêt:

- Certains résultats sont connus dans le cas des extensions finies et passent à la limite: $\mathrm{Br}(k)$ est de torsion.
- En particulier, si A est une algèbre centrale simple, il existe des entiers n et m tels que

$$\underbrace{A \otimes_k \ldots \otimes_k A}_{n} \cong \mathrm{M}_m(k).$$

- Calculs: $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = C_2$, $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$, groupe de Brauer des corps finis.

Groupe de Brauer d’un corps fini

- Les extensions galoisiennes de $\mathbb{F}_p$ sont exactement les $\mathbb{F}_{p^n}$.
- On a donc

$$\mathrm{Br}(k) = \varinjlim_{n} H^2(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*).$$

- On sait que $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p) = C_n$, le groupe cyclique d’ordre n.
- Le second groupe de cohomologie du groupe cyclique C_n est

$$H^2(C_n, M) = M^{C_n} / \mathrm{im}\,\mathrm{mult}_\lambda, \quad \mathrm{mult}_\lambda : M \longrightarrow M$$

où $\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} g^i$ et g est un générateur de C_n.
- Dans notre cas, mult_λ correspond à la norme et M^{C_n} est $\mathbb{F}_p{}^*$.
- Ainsi, on a

$$H^2(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*) = \mathbb{F}_p{}^* / \mathbb{F}_p{}^* = 0.$$

Groupe de Brauer d'un corps fini

- Les extensions galoisiennes de $\mathbb{F}_p$ sont exactement les $\mathbb{F}_{p^n}$.
- On a donc

$$\mathrm{Br}(k) = \varinjlim_{n} H^2\left(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*\right).$$

- On sait que $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p) = C_n$, le groupe cyclique d'ordre n.
- Le second groupe de cohomologie du groupe cyclique C_n est

$$H^2(C_n, M) = M^{C_n} / \mathrm{im}\,\mathrm{mult}_\lambda, \quad \mathrm{mult}_\lambda : M \longrightarrow M$$

où $\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} g^i$ et g est un générateur de C_n.
- Dans notre cas, mult_λ correspond à la norme et M^{C_n} est $\mathbb{F}_p{}^*$.
- Ainsi, on a

$$H^2\left(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*\right) = \mathbb{F}_p{}^* / \mathbb{F}_p{}^* = 0.$$

Groupe de Brauer d'un corps fini

- Les extensions galoisiennes de $\mathbb{F}_p$ sont exactement les $\mathbb{F}_{p^n}$.
- On a donc

$$\mathrm{Br}(k) = \varinjlim_n H^2\left(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*\right).$$

- On sait que $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p) = C_n$, le groupe cyclique d'ordre n.
- Le second groupe de cohomologie du groupe cyclique C_n est

$$H^2(C_n, M) = M^{C_n} / _{\mathrm{im\,mult}_\lambda}, \quad \mathrm{mult}_\lambda : M \longrightarrow M$$

  où $\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} g^i$ et g est un générateur de C_n.
- Dans notre cas, mult_λ correspond à la norme et M^{C_n} est $\mathbb{F}_p{}^*$.
- Ainsi, on a

$$H^2\left(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*\right) = \mathbb{F}_p{}^* / _{\mathbb{F}_p{}^*} = 0.$$

Groupe de Brauer d'un corps fini

- Les extensions galoisiennes de $\mathbb{F}_p$ sont exactement les $\mathbb{F}_{p^n}$.
- On a donc

$$\mathrm{Br}(k) = \varinjlim_n H^2\left(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*\right).$$

- On sait que $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p) = C_n$, le groupe cyclique d'ordre n.
- Le second groupe de cohomologie du groupe cyclique C_n est

$$H^2(C_n, M) = M^{C_n}/_{\mathrm{im\,mult}_\lambda}, \quad \mathrm{mult}_\lambda : M \longrightarrow M$$

où $\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} g^i$ et g est un générateur de C_n.
- Dans notre cas, mult_λ correspond à la norme et M^{C_n} est $\mathbb{F}_p{}^*$.
- Ainsi, on a

$$H^2\left(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*\right) = \mathbb{F}_p{}^*/_{\mathbb{F}_p{}^*} = 0.$$

Groupe de Brauer d'un corps fini

- Les extensions galoisiennes de $\mathbb{F}_p$ sont exactement les $\mathbb{F}_{p^n}$.
- On a donc

$$\mathrm{Br}(k) = \varinjlim_n H^2\left(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*\right).$$

- On sait que $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p) = C_n$, le groupe cyclique d'ordre n.
- Le second groupe de cohomologie du groupe cyclique C_n est

$$H^2(C_n, M) = M^{C_n} /_{\mathrm{im\,mult}_\lambda}, \quad \mathrm{mult}_\lambda : M \longrightarrow M$$

  où $\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} g^i$ et g est un générateur de C_n.
- Dans notre cas, mult_λ correspond à la norme et M^{C_n} est $\mathbb{F}_p{}^*$.
- Ainsi, on a

$$H^2\left(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*\right) = \mathbb{F}_p{}^* /_{\mathbb{F}_p{}^*} = 0.$$

Groupe de Brauer d'un corps fini

- Les extensions galoisiennes de $\mathbb{F}_p$ sont exactement les $\mathbb{F}_{p^n}$.
- On a donc

$$\mathrm{Br}(k) = \varinjlim_n H^2\left(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*\right).$$

- On sait que $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p) = C_n$, le groupe cyclique d'ordre n.
- Le second groupe de cohomologie du groupe cyclique C_n est

$$H^2(C_n, M) = M^{C_n}/_{\mathrm{im}\,\mathrm{mult}_\lambda}, \quad \mathrm{mult}_\lambda : M \longrightarrow M$$

où $\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} g^i$ et g est un générateur de C_n.
- Dans notre cas, mult_λ correspond à la norme et M^{C_n} est $\mathbb{F}_p{}^*$.
- Ainsi, on a

$$H^2\left(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}, \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_{p^n}{}^*\right) = \mathbb{F}_p{}^*/_{\mathbb{F}_p{}^*} = 0.$$

Plan

Les deux approches que l'on a vues ci-dessus se généralisent aux schéma:

- Les *algèbres d'Azumaya* remplacent les algèbres centrales simples.
- La *cohomologie étale* remplace la cohomologie galoisienne.

Dans ce qui suit, X désigne un schéma localement nœthérien.

Les deux approches que l'on a vues ci-dessus se généralisent aux schéma:

- Les *algèbres d'Azumaya* remplacent les algèbres centrales simples.
- La *cohomologie étale* remplace la cohomologie galoisienne.

Dans ce qui suit, X désigne un schéma localement nœthérien.

Les deux approches que l'on a vues ci-dessus se généralisent aux schéma:

- Les *algèbres d'Azumaya* remplacent les algèbres centrales simples.
- La *cohomologie étale* remplace la cohomologie galoisienne.

Dans ce qui suit, X désigne un schéma localement nœthérien.

Plan

$\mathcal{O}_X$-algèbre? I

Le fait que X soit un schéma veut dire:

- X est un espace topologique;
- pour tout ouvert U de X, on a un anneau $\mathcal{O}_X(U)$;
- si $U \subset V$ sont deux ouverts, on a un homomorphisme $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$;
- ces données satisfont quelques bonnes propriétés.

$\mathcal{O}_X$-algèbre? I

Le fait que X soit un schéma veut dire:

- X est un espace topologique;
- pour tout ouvert U de X, on a un anneau $\mathcal{O}_X(U)$;
- si $U \subset V$ sont deux ouverts, on a un homomorphisme $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$;
- ces données satisfont quelques bonnes propriétés.

$\mathcal{O}_X$-algèbre? I

Le fait que X soit un schéma veut dire:

- X est un espace topologique;
- pour tout ouvert U de X, on a un anneau $\mathcal{O}_X(U)$;
- si $U \subset V$ sont deux ouverts, on a un homomorphisme $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$;
- ces données satisfont quelques bonnes propriétés.

$\mathcal{O}_X$-algèbre? I

Le fait que X soit un schéma veut dire:

- X est un espace topologique;
- pour tout ouvert U de X, on a un anneau $\mathcal{O}_X(U)$;
- si $U \subset V$ sont deux ouverts, on a un homomorphisme $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$;
- ces données satisfont quelques bonnes propriétés.

$\mathcal{O}_X$-algèbre? II

Par “soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre”, on entend:

- la donnée d’une $\mathcal{O}_X(U)$-algèbre $\mathcal{A}(U)$ pour tout ouvert U de X;
- de morphismes $\mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathcal{A}(U)$ pour toute paire d’ouverts $U \subset V$ de X;
- quelques bonnes conditions supplémentaires.

$\mathcal{O}_X$-algèbre? II

Par “soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre”, on entend:

- la donnée d'une $\mathcal{O}_X(U)$-algèbre $\mathcal{A}(U)$ pour tout ouvert U de X;
- de morphismes $\mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathcal{A}(U)$ pour toute paire d'ouverts $U \subset V$ de X;
- quelques bonnes conditions supplémentaires.

$\mathcal{O}_X$-algèbre? II

Par "soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre", on entend:

- la donnée d'une $\mathcal{O}_X(U)$-algèbre $\mathcal{A}(U)$ pour tout ouvert U de X;
- de morphismes $\mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathcal{A}(U)$ pour toute paire d'ouverts $U \subset V$ de X;
- quelques bonnes conditions supplémentaires.

Algèbres d'Azumaya

Définition (Algèbre d'Azumaya)

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre qui soit de type fini comme $\mathcal{O}_X$-module. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre d'Azumaya s'il existe un recouvrement $\{ U_i \longrightarrow X \}$ de X pour la topologie étale et des entiers r_i tels que

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{U_i} \cong \mathrm{M}_{r_i}(\mathcal{O}_{U_i}), \quad \forall i.$$

Remarque

Un morphisme Spec $F \longrightarrow$ Spec K est étale si et seulement si F est séparable sur K.

Algèbres d'Azumaya

Définition (Algèbre d'Azumaya)

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre qui soit de type fini comme $\mathcal{O}_X$-module. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre d'Azumaya s'il existe un recouvrement $\{ U_i \longrightarrow X \}$ de X pour la topologie étale et des entiers r_i tels que

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{U_i} \cong \mathrm{M}_{r_i}(\mathcal{O}_{U_i}), \quad \forall i.$$

Remarque

Un morphisme Spec $F \longrightarrow$ Spec K est étale si et seulement si F est séparable sur K.

Groupe de Brauer

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux algèbres d'Azumaya sur $\mathcal{O}_X$. On dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont *équivalentes* s'il existe deux $\mathcal{O}_X$-modules localement libres et de rang fini E et E' tels que

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E) \cong \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E).$$

Comme dans le cas classique, il s'agit d'une relation d'équivalence. Le produit tensoriel sur $\mathcal{O}_X$ induit une structure de groupe abélien sur l'ensemble des classes d'équivalences.

Définition (Groupe de Brauer)

Le groupe abélien ainsi défini s'appelle groupe de Brauer de X et se note $\mathrm{Br}(X)$.

Groupe de Brauer

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux algèbres d'Azumaya sur $\mathcal{O}_X$. On dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont *équivalentes* s'il existe deux $\mathcal{O}_X$-modules localement libres et de rang fini E et E' tels que

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E) \cong \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E).$$

Comme dans le cas classique, il s'agit d'une relation d'équivalence. Le produit tensoriel sur $\mathcal{O}_X$ induit une structure de groupe abélien sur l'ensemble des classes d'équivalences.

Définition (Groupe de Brauer)

Le groupe abélien ainsi défini s'appelle groupe de Brauer de X et se note $\mathrm{Br}(X)$.

Groupe de Brauer

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux algèbres d'Azumaya sur $\mathcal{O}_X$. On dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont *équivalentes* s'il existe deux $\mathcal{O}_X$-modules localement libres et de rang fini E et E' tels que

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E) \cong \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E).$$

Comme dans le cas classique, il s'agit d'une relation d'équivalence. Le produit tensoriel sur $\mathcal{O}_X$ induit une structure de groupe abélien sur l'ensemble des classes d'équivalences.

Définition (Groupe de Brauer)

Le groupe abélien ainsi défini s'appelle groupe de Brauer de X et se note $\mathrm{Br}(X)$.

Lien avec les algèbres centrales simples

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre qui soit de type fini comme $\mathcal{O}_X$-module. On a le résultat suivant:

Proposition

$\mathcal{A}$ est une algèbre d'Azumaya si et seulement $\mathcal{A}$ est localement libre comme $\mathcal{O}_X$-module et si $\mathcal{A}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$ est une algèbre centrale simple sur $\kappa(x)$ pour tout $x \in X$.

Plan

Le groupe de Brauer-Grothendieck

Notation

On note $\mathbb{G}_m$ le faisceau sur le site étale $X_{\text{ét}}$ de X qui envoie un X-schéma étale U sur $\mathcal{O}_U(U)^*$.

Définition (Groupe de Brauer-Grothendieck)

Le groupe de Brauer-Grothendieck (ou groupe de Brauer cohomologique) de X, que l'on note $\mathrm{Br}'(X)$ est alors

$$\mathrm{Br}'(X) = H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbb{G}_m).$$

Le groupe de Brauer-Grothendieck

Notation

On note $\mathbb{G}_m$ le faisceau sur le site étale $X_{\text{ét}}$ de X qui envoie un X-schéma étale U sur $\mathcal{O}_U(U)^*$.

Définition (Groupe de Brauer-Grothendieck)

Le groupe de Brauer-Grothendieck (ou groupe de Brauer cohomologique) de X, que l'on note $\mathrm{Br}'(X)$ est alors

$$\mathrm{Br}'(X) = H^2(X_{ét}, \mathbb{G}_m).$$

Plan

Groupe de Brauer et groupe de Brauer-Grothendieck

Contrairement au cas classique, on n'a pas forcément une égalité entre le groupe de Brauer et le groupe de Brauer cohomologique. Cependant, il existe un homomorphisme injectif

$$\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(X).$$

Le cas des corps

Dans le cas des corps, on a

$$\mathrm{Br}(k) \cong \mathrm{Br}\left(\operatorname{Spec} k\right) \cong \mathrm{Br}'\left(\operatorname{Spec} k\right).$$

Pour calculer...

Un certain nombre de résultats facilitent la détermination du groupe de Brauer.

- Si X est une variété lisse, $\mathrm{Br}'(X)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Br}\left(k(X)\right)$. Ainsi, le groupe de Brauer de l'espace projectif sur un corps algébriquement clos est trivial.
- Si X est compact, $\mathrm{Br}'(X)$ est un groupe de torsion. En utilisant la suite exacte (si la caractéristique de $\kappa(x)$ ne divise jamais n) de Kümmer

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

la détermination de la partie de n-torsion est facilitée.

Pour calculer...

Un certain nombre de résultats facilitent la détermination du groupe de Brauer.

- Si X est une variété lisse, $\mathrm{Br}'(X)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Br}\left(k(X)\right)$. Ainsi, le groupe de Brauer de l'espace projectif sur un corps algébriquement clos est trivial.
- Si X est compact, $\mathrm{Br}'(X)$ est un groupe de torsion. En utilisant la suite exacte (si la caractéristique de $\kappa(x)$ ne divise jamais n) de Kümmer

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

la détermination de la partie de n-torsion est facilitée.

Plan

Bibliographie

- Alexander GROTHENDIECK, *Le groupe de Brauer: I, II et III*, Séminaire N. Bourbaki, 1963-1966.
- James S. MILNE, *Étale cohomology*, Princeton University Press, 1980.
- Alexei SKOROBOGATOV, *Torsors and rational points*, Cambridge University Press, 2001.
- Jean-Pierre SERRE, *Cohomologie galoisienne*, Springer, 1994.
- Jean-Pierre SERRE, *Corps locaux*, Springer, 1995.