LE GROUPE DE BRAUER-GROTHENDIECK G B-G

Introduction

On associe à tout schéma X (pour simplifier, un sous-ensemble de k^n, où k est un corps, défini par un ensemble d'équations polynômiales) deux invariants: le groupe de **Brauer** $\mathrm{Br}(X)$ et le groupe de **Brauer-Grothendieck** $\mathrm{Br}'(X)$. Le premier généralise le groupe de Brauer d'un corps qui classifie les algèbres de division. Le second est un groupe de cohomologie et généralise la définition du groupe de Brauer d'un corps via le deuxième groupe de cohomologie galoisienne. Les deux groupes sont utiles en géométrie arithmétique. On présente dans cette introduction l'une des utilisations de $\mathrm{Br}'(X)$.

Historique

Malgré son apparente simplicité, l'étude des équations diophantiennes (équations polynômiales dont les solutions cherchées sont entières) est un problème difficile (dernier théorème de Fermat, par exemple) qui a donné lieu au dixième problème de Hilbert. On sait depuis 1970 qu'il n'existe pas d'algorithme qui détermine si une équation diophantienne possède une solution (non triviale) ou non [Mat93]. Si les équations considérées sont homogènes, la recherche de solution entières est équivalente à la recherche de solutions rationnelles. Une condition nécessaire pour l'existence d'une solution rationnelle est l'existence d'une solution dans toutes les complétions de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il doit exister une solution dans tous les $\mathbb{Q}_p$ et dans $\mathbb{R}$.

La question qui se pose alors et de savoir si cette condition est suffisante. On sait que c'est le cas pour les polynômes homogènes de degré deux (théorème de Hasse-Minkowski, [Ser73]). Cependant, il a été montré que l'équation

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$$

possède une solution dans $\mathbb{R}$, dans tous les $\mathbb{Q}_p$ mais ne possède pas de solution non triviale dans $\mathbb{Q}$ [Sel64].

Reformulation du problème et principe de Hasse

Soit k un corps de nombre et V une variété algébrique définie sur k. Soit Ω l'ensemble des places de k (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalences de valuations sur k). Pour une valuation v de k, on note k_v la complétion de k par rapport à v. La question que l'on se posait ci-dessus peut se reformuler comme suit

$$V(k_v) \neq \emptyset \ \forall v \in \Omega \overset{?}{\Rightarrow} V(k) \neq \emptyset.$$

Si l'implication ci-dessus est satisfaite, on dit que V **satisfait le principe de Hasse**.

Obstruction de Manin et groupe de Brauer

Pour un grand nombre de variétés qui mettent en défaut le principe de Hasse, cela est expliqué par l'obstruction de Manin. Cette obstruction se calcule via le groupe de Brauer-Grothendieck de la variété.

Les groupes de Brauer

Groupe de Brauer d'un corps

Soit k un corps et A une algèbre de dimension finie sur k. On sait que A est centrale simple s'il existe une extension finie séparable K de k et un entier n tel que $A \otimes_k K \cong \mathrm{M}_n(K)$.
Si A et A' sont deux $k-$algèbres centrales simples de dimension finie, on dit qu'elles sont **équivalentes** s'il existe deux entiers n et n' tels que $A \otimes_k \mathrm{M}_n(K) \cong A' \otimes_k \mathrm{M}_{n'}(K)$.
L'ensemble des classes d'équivalences, muni du produit tensoriel, est un groupe abélien qui est appelé **groupe de Brauer de** k et est noté $\mathrm{Br}(k)$. Il est facile de montrer l'isomorphisme

$$\mathrm{Br}(k) \cong H^2(\mathrm{Gal}(k_{\mathrm{sep}}, k), {k_{\mathrm{sep}}}^*),$$

où k_{sep} est une clôture séparable de k. Comme exemples, on sait que le groupe de Brauer de $\mathbb{R}$ est cyclique à deux éléments; que celui des corps finis ainsi que des corps algébriquement clôs est trivial et que celui d'un corps local est $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Groupe de Brauer d'un schéma

Soit X un schéma localement noethérien et soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre qui est de type fini comme $\mathcal{O}_X$-module. On dit que $\mathcal{A}$ est une **algèbre d'Azumaya** s'il existe un recouvrement

$$\{U_i \longrightarrow X\}_{i \in I}$$

de X pour la topologie étale et des entiers r_i tels que l'on ait

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{U_i} \cong \mathrm{M}_{r_i}(\mathcal{O}_{U_i}), \quad \forall i \in I.$$

Comme dans le cas classique, on cherche à définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des algèbres d'Azumaya sur X. On dit que deux algèbres d'Azumaya $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont **équivalentes** s'il existe deux $\mathcal{O}_X$- modules localement libres et de rang fini E, E' tels que

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E) \cong \mathcal{A}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E').$$

A nouveau, l'ensemble des classes d'équivalences, muni du produit tensoriel, est un groupe abélien. On l'appelle groupe de Brauer de X et on le note $\mathrm{Br}(X)$. L'association $X \longmapsto \mathrm{Br}(X)$ est, via l'image inverse, un foncteur contravariant de la catégorie des schémas localement noethériens dans la catégorie des groupes abéliens.

Groupe de Brauer-Grothendieck d'un schéma

Soit X un schéma localement noetherien. On note $\mathbb{G}_m$ le faisceau sur le site étale X_{et} de X qui envoie un X-schéma étale sur les sections globales inversibles, c'est-à-dire:

$$\mathbb{G}_m : (U \longrightarrow X) \longmapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*.$$

Le groupe de Brauer-Grothendieck de X est alors le deuxième groupe de cohomologie étale

$$\mathrm{Br}'(X) := H^2(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{G}_m).$$

L'association $X \longmapsto \mathrm{Br}'(X)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des schémas localement noethériens dans la catégorie des groupes abéliens.

Quelques relations

Contrairement au cas classique, on n'a pas une égalité entre le groupe de Brauer et le groupe cohomologique. Cependant, on a l'inclusion suivante (voir [Mil80])

$$\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(X)\ .$$

Dans le cas d'un corps k, la vie est plus belle et on a

$$\mathrm{Br}(k) \cong \mathrm{Br}(\mathrm{Spec}\, k) \cong H^2(\mathrm{Gal}(k_{\mathrm{sep}}, k), k^*_{\mathrm{sep}}) \cong \mathrm{Br}'(\mathrm{Spec}\, k).$$

Calcul du groupe de Brauer

La détermination du groupe de Brauer-Grothendieck d'un schéma est souvent (très) délicate. Quelques résultats nous facilitent cependant la vie. Par exemple, si X est une variété lisse et intégrale sur un corps k, un théorème de Grothendieck nous assure que $\mathrm{Br}'(X)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Br}(k(X))$, le groupe de Brauer du corps des fonctions de X. En particulier, le groupe de Brauer-Grothendieck de l'espace projectif sur un corps algébriquement clôs est trivial.
On trouve dans [Gro] un certain nombre de résultats utiles, notamment des calculs en petites dimensions

CONTACTS

Réalisateur du projet:
Rafael Guglielmetti

Superviseurs:
Alexei Skorobogatov (Imperial College)
Eva Bayer (EPFL)

REFERENCES

[Gro] A. Grothendieck, *Le groupe de brauer: I, II et III*, Séminaire N. Bourbaki, 1963-1966.

[Mat93] Y. Matiyasevic, *Hilbert's tenth problem*, The MIT Press, 1993.

[Mil80] J.S. Milne, *Etale cohomology*, vol. 33, Princeton Univ Pr, 1980.

[Sel64] E.S. Selmer, *The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$.*, Acta Mathematica, 85 (1964).

[Ser73] J.P. Serre, *A course in arithmetic*, vol. 7, Springer Verlag, 1973.