ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

SMA

Introduction à la géométrie algébrique

Rafael GUGLIELMETTI

Projet de semestre
Supervisé par la prof. Eva BAYER FLUCKIGER
Assistant responsable : Daniel Arnold MOLDOVAN

1er novembre 2011

Table des matières

Résumé

Le but de ce projet de semestre est de présenter une introduction à la géométrie algébrique. La première partie traite du cas classique avec l'introduction de la topologie de Zariski sur l'espace affine n-dimensionnel (en gros, K^n pour un corps K). Il suit une étude des morphismes entre les variétés et du rapport entre les variétés algébriques et les algèbres réduites de type fini. Le second chapitre présente les bases de la géométrie algébrique moderne avec l'introduction des faisceaux et des schémas. Les deux résultats principaux sont les théorèmes 2.2.53 et 2.2.64. Le premier implique l'existence d'une équivalence de catégories entre la catégorie des schémas affines et celle des anneaux (commutatifs et unitaires) et le second montre que les schémas généralisent effectivement les variétés algébriques.

Chapitre 1

Géométrie algébrique classique

1.1 Variétés algébriques

La matière présentée dans cette partie est composée des définitions de base de la géométrie algébrique classique. Les ouvrages de références sont [Har77] et [Per95]. Dans toute cette section K désigne un corps commutatif [1] et un idéal désignera toujours un idéal de l'anneau des polynômes $K[x_1, \ldots, x_n]$ (ou de $K[x_0, \ldots, x_n]$, si l'on travaille sur l'espace projectif). Pour alléger, on écrira parfois R pour $K[x_1, \ldots, x_n]$ (ou pour $K[x_0, \ldots, x_n]$).

1.1.1 Ensembles algébriques

Définition 1.1.1 (Espace affine)
On appelle espace affine de dimension n *l'ensemble des n-tuples d'éléments de K. Cet ensemble est noté $\mathbb{A}^n(K)$, ou $\mathbb{A}^n$ s'il n'y a aucune ambiguité sur le corps.*

Définition 1.1.2
Soit $S \subset K[x_1, \ldots, x_n]$. On définit

$$\mathcal{V}(S) = \big\{x \in K^n : f(x) = 0, \forall f \in S\big\} \subset \mathbb{A}^n.$$

Proposition 1.1.3 (Propriétés de base de $\mathcal{V}$)
Soient $I, I', J \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ des idéaux avec $I \subset I'$ et $S, S' \subset K[x_1, \ldots, x_n]$. On a les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{V}(I) \supset \mathcal{V}(I')$;
(ii) $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S\rangle)$;
(iii) $\mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cap J)$;
(iv) $\mathcal{V}(S \cup S') = \mathcal{V}(S) \cap \mathcal{V}(S')$;
(v) $\mathcal{V}(I + J) = \mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(J)$.

Démonstration. *(i)* Évident.

(ii) Le point précédent entraîne que $\mathcal{V}(\langle S\rangle) \subset \mathcal{V}(S)$. Pour l'autre inclusion, soit $x \in \mathcal{V}(S)$ et $g \in \langle S\rangle$, c'est à dire qu'il existe $g_1, \ldots, g_m \in S$ et des polynômes $f_1, \ldots, f_m$ de $K[x_1, \ldots, x_n]$ tels que

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i f_i.$$

1. Pour l'instant on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire mais, par la suite, on le supposera algébriquement clos.

On a alors $g(x) = 0$, comme désiré.

(iii) (i) Soit $x \in \mathcal{V}(IJ)$ et supposons que $x \notin \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$. Cela implique qu'il existe $f \in I$ et $g \in J$ tels que $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$, contredisant le fait que $x \in \mathcal{V}(IJ)$. L'autre inclusion est claire.

(ii) Soit $a \in \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$ et supposons, sans perte de généralité, que $a \in \mathcal{V}(I)$, alors $a \in \mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(I \cap J)$. Réciproquement, on considère $a \in \mathcal{V}(I \cap J)$. Si $a \notin \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$, on peut trouver deux polynômes $f \in I$ et $g \in J$ tels que $f(a) \neq 0 \neq g(a)$. Puisque I et J sont des idéaux, on a $fg \in I \cap J$ et $(fg)(a) \neq 0$, contredisant le fait que $a \in \mathcal{V}(I \cap J)$.

(iv) Si $a \in \mathcal{V}(S \cup S')$, alors tous les polynômes de S et S' s'annulent en a, ce qui implique que $a \in \mathcal{V}(S) \cap \mathcal{V}(S')$. Réciproquement, si $a \in \mathcal{V}(S) \cap \mathcal{V}(S')$, alors tous les polynômes de S et S' s'annulent en a.

(v) Soit $a \in \mathcal{V}(I + J)$, alors $a \in \mathcal{V}(I + J) \subset \mathcal{V}(I)$, de même pour J. Si, maintenant, $a \in \mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(J)$ et si $f \in I$ et $g \in J$, on aura $(f + g)(a) = 0$.

□

Définition 1.1.4 (Ensemble algébrique)
Soit $A \subset \mathbb{A}^n$. On dit que A est un ensemble algébrique *s'il existe un sous-ensemble S de $K[x_1, \dots, x_n]$ tel que $A = \mathcal{V}(S)$.*

Remarques 1.1.5 (i) Le point *(ii)* de la proposition précédente nous indique qu'un ensemble V est algébrique s'il existe un idéal I tel que $V = \mathcal{V}(I)$.

(ii) Si S est un ensemble algébrique et si I est un idéal tel que $S = \mathcal{V}(I)$, le fait que $K[x_1, \dots, x_n]$ soit nœtherien (voir A.1.4) implique qu'il existe des polynômes $f_1, \dots, f_m$ tels que
$$S = \mathcal{V}(I) = \mathcal{V}\big(\{f_1, \dots, f_m\}\big).$$

(iii) Si $\{f_1, \dots, f_m\} \subset K[x_1, \dots, x_n]$, on note parfois $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_m)$ à la place de $\mathcal{V}\big(\{f_1, \dots, f_m\}\big)$.

Exemples 1.1.6 (Ensembles algébriques)
Quelques exemples d'ensembles algébriques :

(i) $\mathcal{V}(1) = \emptyset$;

(ii) $\mathcal{V}(0) = \mathbb{A}^n$;

(iii) si $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, alors $\mathcal{V}(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \{a\}$;

(iv) tout sous-ensemble fini de $\mathbb{A}^n$: si $S = \{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$:
$$S = \bigcup_{i=1}^{n} \{\alpha^i\} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}(x_1 - \alpha_1^i, \dots, x_n - \alpha_n^i) = \mathcal{V}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \langle x_1 - \alpha_1^i, \dots, x_n - \alpha_n^i \rangle\right).$$

Définition 1.1.7 (Topologie de Zariski)
On définit une topologie sur $\mathbb{A}^n$ de la manière suivante : un ensemble $S \subset \mathbb{A}^n$ est fermé si et seulement s'il est un ensemble algébrique. Cette topologie est appelée topologie de Zariski.

Remarque 1.1.8
Les points *(iii)* et *(v)* (qui se généralise à une somme infinie) de la proposition 1.1.3 assurent qu'il s'agit effectivement d'une topologie.

Exemples 1.1.9 (i) Soit F un fermé de $\mathbb{A}^1$. La remarque (i) de 1.1.5 et le fait que $K[x]$ soit principal impliquent l'existence d'un polynôme $f \in K[x]$ tel que $F = \mathcal{V}(f)$. Si f est non-nul, ses racines sont en nombre fini, ce qui entraîne que les fermés de $\mathbb{A}^1$ sont : $\mathbb{A}^1$, $\emptyset$ et les sous-ensembles finis de K[2].

(ii) Si $n = 2$ et $K = \mathbb{R}$ on trouve que les singletons et les droites font partie des fermés (ils ne sont pas les seuls, on y trouve aussi les cercles, par exemple).

Remarques 1.1.10 (i) On montrera plus bas (proposition 1.1.36) que si K est infini, la topologie de Zariski n'est pas de Hausdorff.

(ii) Si l'on prend $K = \mathbb{R}$ et que l'on regarde le produit des topologies de Zariski sur $\mathbb{R}^2$, on constate que les fermés sont : $\emptyset$, $\mathbb{R}^2$, les ensembles finis de points et les unions finies de droites verticales et horizontales. Cependant, le cercle est un fermé de $\mathbb{R}^2$ pour sa topologie de Zariski. On constate donc que la topologie de Zariski du produit n'est pas égale au produit des topologies.

1.1.2 Espaces irréductibles

Proposition 1.1.11
Soit X un espace topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *L'union de deux fermés propres est propre.*

(ii) *Si U, V sont deux ouverts avec $U \cap V = \emptyset$ alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.*

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ On montre la contraposée. Pour cela, soient U, V deux ouverts non-vides de X. On aimerait voir que $U \cap V \neq \emptyset$. Pour cela, on a :

$$X \neq (X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X \setminus (U \cap V).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soient F, F' deux fermés propres de X. Puisque $X \setminus F$ et $X \setminus F'$ sont non-vides, on a

$$\emptyset \neq (X \setminus F) \cap (X \setminus F') = X \setminus (F \cup F'),$$

ce qui implique que $F \cup F' \neq X$.

□

Définition 1.1.12 (Espace topologique irréductible)
Un espace topologique non-vide satisfaisant l'une des conditions ci-dessus est dit irréductible.

Remarque 1.1.13
Lorsque l'on parle d'un sous-ensemble irréductible, il est sous-entendu que l'ensemble, muni de sa topologie induite, est irréductible.

Exemples 1.1.14 (i) Si K est infini, $\mathbb{A}^1$ est irréductible puisque les seuls fermés propres sont l'ensemble vide et les ensembles finis (voir exemple 1.1.9).

(ii) Si X est un espace topologique de Hausdorff contenant au moins deux points, en choisissant deux points distincts et les voisinages disjoints dont l'existence est assurée par la condition de Hausdorff on remarque que l'espace topologique n'est pas irréductible.

2. Il s'agit de la topologie cofinie, qui est la topologie discrète si K est fini. Si K est infini, il s'agit d'un exemple classique de topologie non-Hausdorff.

(iii) Si $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ est irréductible, le fermé $\mathcal{V}(f)$ est irréductible (voir proposition 1.1.29).

Proposition 1.1.15
Soit X un espace topologique et $V \subset X$ un sous-ensemble irréductible. Alors $\bar{V}$ est irréductible.

Démonstration. Soient X et V comme dans l'énoncé et supposons que $\bar{V} = A \cup B$ pour des fermés de $\bar{V}$. On trouve que $(V \cap A) \cup (V \cap B) = V$ ce qui implique que $V = V \cap A$ ou $V = V \cap B$. Puisque A et B sont des fermés de X, on trouve $\bar{V} = A$ ou $\bar{V} = B$, comme désiré. Ainsi, $\bar{V}$ est irréductible. □

Définition 1.1.16 (Composante irréductible)
Soit X un espace topologique. Une composante irréductible *est un sous-ensemble Y irréductible maximal pour l'inclusion.*

Remarque 1.1.17
La proposition précédente implique que les composantes irréductibles sont fermées.

Proposition 1.1.18
Soit U un ensemble algébrique. Alors U s'écrit comme une union finie de composantes irréductibles.

Démonstration. Supposons que cela ne soit pas le cas. Alors, l'ensemble des ensembles algébriques $V = \mathcal{V}(I)$ pour un idéal I qui ne s'écrivent pas comme une union finie de composantes irréductibles n'est pas vide. Le fait que $K[x_1, \ldots, x_n]$ soit nœtherien (voir A.1.4) entraîne l'existence d'un idéal maximal M pour cette propriété (voir A.1.2) et l'on pose $W = \mathcal{V}(M)$. Le fait que W ne soit pas irréductible entraîne l'existence de deux fermés propres W_1, W_2 tels que $W = W_1 \cup W_2$. Puisque l'application $\mathcal{V}$ est décroissante, chacun des deux ensembles algébriques W_1 et W_2 s'écrit comme une union finie de composantes irréductibles, tout comme W. □

Exemple 1.1.19
On considère dans $\mathbb{A}^2$ l'ensemble algébrique $V = \mathcal{V}(xy)$. On a $\langle xy \rangle = \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ et les propriétés de $\mathcal{V}$ impliquent que $V = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y)$. De plus, chacun de ces deux termes est irréductible, ce qui entraîne que V s'écrit comme union de deux composantes irréductibles.

Proposition 1.1.20
Soit X un espace irréductible et V un ouvert non-vide de X. Alors V est irréductible et dense.

Démonstration. Le fait que V soit irréductible découle facilement de la condition (ii) de la proposition 1.1.11. On a :

$$X = (X \setminus V) \cup \bar{V},$$

Puisque V est non-vide, on doit avoir $\bar{V} = X$. Ainsi, V est dense dans X. □

Définition 1.1.21 (Variété algébrique affine, variété quasi-affine)
Une variété algébrique affine *ou, plus simplement,* variété affine *est un ensemble algébrique irréductible. Un sous-ensemble ouvert d'une variété affine est une* variété quasi-affine.

Exemple 1.1.22
Tout les irréductibles données dans l'exemple 1.1.14 sont des variétés.

1.1.3 L'idéal associé à un sous-ensemble de l'espace affine

Définition 1.1.23
Soit $S \subset \mathbb{A}^n$. On définit

$$\mathcal{A}(S) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] : f(x) = 0, \forall x \in S\}.$$

On remarque que $\mathcal{A}(S)$ est un idéal de $K[x_1, \dots, x_n]$ pour tout $S \subset \mathbb{A}^n$.

Proposition 1.1.24 (Propriétés de base de $\mathcal{A}$)
Soient $S \subset S' \subset \mathbb{A}^n$ et V un ensemble algébrique ainsi que I un idéal de $K[x_1, \dots, x_n]$. Alors, on a :

(*i*) $\mathcal{A}(S) \supset \mathcal{A}(S')$;

(*ii*) $\mathcal{V}\mathcal{A}(V) = V$

(*iii*) $I \subset \mathcal{A}\mathcal{V}(I)$.

(*iv*) $\bar{S} = \mathcal{V}\mathcal{A}(S)$.

Démonstration. (i) Évident.

(ii) Supposons que $V = \mathcal{V}(I)$. On remarque que $I \subset \mathcal{A}(V)$, ce qui implique que $\mathcal{V}\mathcal{A}(V) \subset \mathcal{V}(I) = V$. L'autre inclusion est claire.

(iii) Soit $f \in I$. Pour tout $a \in \mathcal{A}\mathcal{V}(I)$, on a $f(a) = 0$, ce qui entraîne $f \in \mathcal{A}\mathcal{V}(I)$.

(iv) On a $\bar{S} \supset S$, donc $\mathcal{A}(\bar{S}) \subset \mathcal{A}(S)$ et $\mathcal{V}\mathcal{A}(S) \subset \mathcal{V}\mathcal{A}(\bar{S}) = \bar{S}$. Pour l'autre inclusion, on a $S \subset \mathcal{V}\mathcal{A}(S)$ et donc $\bar{S} \subset \mathcal{V}\mathcal{A}(S)$.

□

Remarque 1.1.25
Le théorème des zéros de Hilbert (théorème 1.1.32), présenté ci-dessous, précise l'inclusion donnée au point (*iii*).

Exemples 1.1.26 (i) $\mathcal{A}(0) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

(ii) $\mathcal{A}(\{a_1, \dots, a_n\}) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$, pour tous $a_1, \dots, a_n \in K$.

Définition 1.1.27 (Anneau de coordonnées affine)
*Soit V un ensemble algébrique. L'*anneau de coordonnées affine *de V, noté $\Gamma(V)$, est $K[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{A}(V)$.*

Proposition 1.1.28
Si K est infini, alors $\mathcal{A}(\mathbb{A}^n) = 0$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$ et $0 \neq f \in \mathcal{A}(\mathbb{A}^1)$, alors f possède un nombre infini de racines, ce qui n'est pas possible. Supposons maintenant l'assertion vérifiée pour $\mathcal{A}(\mathbb{A}^{n-1})$ et supposons qu'il existe un polynôme non-nul f dans $\mathcal{A}(\mathbb{A}^n)$, c'est-à-dire que l'on peut trouver $f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_n]$, tels que

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_m(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^m + \dots + f_0(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad f_m \neq 0.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $\alpha \in \mathbb{A}^{n-1}$ tel que $f_m(\alpha) \neq 0$. On trouve alors que pour tout $a \in K$, $f(\alpha, a) = 0$, ce qui ne peut pas se produire. □

La proposition suivante caractérise la notion d'irréductibilité à l'aide de propriétés algébriques.

Proposition 1.1.29
Soit V un ensemble algébrique. Alors V est irréductible si et seulement si l'idéal $\mathcal{A}(V)$ est premier.

Démonstration. Supposons que V soit irréductible et choisissons f_1 ainsi que f_2 deux polynômes tels que $f_1 f_2 \in \mathcal{A}(V)$. On pose $I_1 = \langle f_1 \rangle$ et $I_2 = \langle f_2 \rangle$ et on écrit

$$V = \mathcal{V}\mathcal{A}(V) \subset \mathcal{V}(I_1 I_2) = \mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2).$$

L'irréductibilité de V implique que l'on a $V \cap \mathcal{V}(I_1) = V$ ou $V \cap \mathcal{V}(I_2) = V$ ce qui entraîne que $f_1 \in \mathcal{A}(V)$ ou $f_1 \in \mathcal{A}(V)$.
Réciproquement, supposons que $\mathcal{A}(V)$ soit premier et que A_1, A_2 soient des fermés de V tels que $V = A_1 \cup A_2$. Il existe alors deux idéaux I_1 et I_2 tels que

$$V \subset \mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2) = \mathcal{V}(I_1 I_2),$$

ce qui implique

$$I_1 I_2 \subset \mathcal{A}\mathcal{V}(I_1 I_2) \subset \mathcal{A}(V).$$

Puisque $\mathcal{A}(V)$ est premier, on a $I_1 \subset \mathcal{A}(V)$ ou $I_2 \subset \mathcal{A}(V)$. Sans perte de généralité, supposons que $I_1 \subset \mathcal{A}(V)$. On a donc

$$\mathcal{V}(I_1) \cap V \subset V \subset \mathcal{V}(I_1) \cap V,$$

c'est-à-dire $V = A_1$, comme désiré. □

Exemples 1.1.30 (i) Si K est infini, alors $\mathbb{A}^n$ est irréductible car $K[x_1, \ldots, x_n]$ est un anneau intègre.

(ii) Si $K = \mathbb{R}$, $\mathcal{V}(x^2+1)$ est irréductible. Cela n'est pas le cas avec $K = \mathbb{C}$.

(iii) En anticipant sur le théorème des zéros de Hilbert, on trouve que l'ensemble algébrique $\mathcal{V}(x, y)$ de $\mathbb{A}^2$ est irréductible car $K[x,y]/\langle x, y \rangle \cong K$.

(iv) Considérons l'ensemble $Y = \{(t, t^2, t^3) : t \in K\} \subset \mathbb{A}^3$ pour un corps K infini. On constate que Y s'écrit comme $\mathcal{V}(y - x^2, z - x^3)$, ce qui implique que Y est fermé. Soit maintenant l'homomorphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \varphi : K[x,y,z] &\longrightarrow K[t] \\ f(x,y,z) &\longmapsto f(t, t^2, t^3). \end{aligned}$$

On constate que φ est surjectif et que son noyau est exactement $\mathcal{A}(Y)$, ce qui implique que $\Gamma(Y) \cong K[t]$, qui est intègre. Ainsi, Y est irréductible et donc une variété affine.

1.1.4 Théorème des zéros de Hilbert

Les preuves des trois prochains résultats peuvent être trouvées dans [Tes10]. La notion de radical d'un idéal est introduite dans les annexes (définition A.1.5 page 63).

Proposition 1.1.31
Soit K un corps algébriquement clos. Les idéaux maximaux de $K[x_1, \ldots, x_n]$ sont exactement les idéaux de la forme

$$M_a = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle, \quad a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n.$$

De manière plus générale, si A est une K-algèbre de type finie et $M \subset A$ un idéal maximal, alors $A/M \cong K$.

Démonstration. Proposition 4.11 de [Tes10]. □

Théorème 1.1.32 (Nullstellensatz)
Soit K un corps algébriquement clos et I un idéal de $K[x_1,\ldots,x_n]$. Alors, on a $\mathcal{A}\mathcal{V}(I)=\sqrt{I}$.

Démonstration. Théorème 4.20 de [Tes10]. □

Corollaire 1.1.33 (Nullstellensatz faible)
Soit K un corps algébriquement clos et I un idéal propre de $K[x_1,\ldots,x_n]$. Alors $\mathcal{V}(I)\neq\emptyset$.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{V}(I)$ soit vide pour un idéal propre I de $K[x_1,\ldots,x_n]$. Le théorème des zéros de Hilbert implique que

$$\sqrt{I}=\mathcal{A}\mathcal{V}(I)=\mathcal{A}(\emptyset)=K^n.$$

Or, puisque I est propre, il existe un idéal maximal M contenant J, c'est-à-dire

$$I\subset\sqrt{I}\subsetneq K^n,$$

contradiction. Ainsi, $\mathcal{V}(I)$ est non-vide. □

Proposition 1.1.34
Le Nullstellensatz faible et le Nullstellensatz sont en fait équivalents.

Démonstration. On suppose donc que le Nullstellensatz faible est vérifié et on montre l'égalité $\sqrt{I}=\mathcal{A}\mathcal{V}(I)$ pour tout idéal I. Si $f\in\sqrt{I}$, alors $f^m\in I$ pour un certain $m\in\mathbb{N}$ et donc $f^m(a)=0$ pour tout $a\in\mathcal{V}(I)$. L'intégrité de $K[x_1,\ldots,x_n]$ implique $f(a)=0$ pour tout $a\in\mathcal{V}(I)$ et donc $f\in\mathcal{A}\mathcal{V}(I)$. Réciproquement, on considère $f\in\mathcal{A}\mathcal{V}(I)$. On utilise alors l'astuce de Rabinowitsch (voir [Rab30]). On écrit $I=\langle f_1,\ldots,f_m\rangle$ et on considère l'idéal $J=\langle f_1,\ldots,f_m,1-tf\rangle\subset K[x_1,\ldots,x_n,t]$. Dans ce cas, il est clair que $\mathcal{V}(J)=\emptyset$ et la version faible du théorème implique que $J=K[x_1,\ldots,x_n,t]$, c'est-à-dire que l'on a

$$1=\sum_{i=1}^m g_i(x_1,\ldots,x_n,t)f_i+h(x_1,\ldots,x_n,t)(1-tf),$$

pour des $g_i\in K[x_1,\ldots,x_n,t]$. En posant $t=\frac{1}{f}$, l'égalité devient

$$1=\sum_{i=1}^m g_i\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{1}{f}\right).$$

En multipliant les deux côtés par g^r, où r est le degré maximal de t dans les g_i, on trouve $g^r\in I$. Ainsi, $g\in\sqrt{I}$, comme désiré. □

Proposition 1.1.35
Pour une variété affine Y, il existe une bijection entre les idéaux premiers de $\Gamma(Y)$ et les sous-ensembles fermés irréductibles de Y.

Démonstration. On considère Y une variété affine et on note $\operatorname{Spec} Y$ l'ensemble des idéaux premiers de $\Gamma(Y)$ et $t(Y)$ l'ensemble des sous-ensembles fermés et irréductibles de Y. On définit alors les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha : \operatorname{Spec}\Gamma(Y) &\longrightarrow t(Y) \\ P/_{\mathcal{A}(Y)} &\longmapsto \mathcal{V}(P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta : t(Y) &\longrightarrow \operatorname{Spec}\Gamma(Y) \\ X &\longmapsto \mathcal{A}(X)/_{\mathcal{A}(Y)}, \end{aligned}$$

et on vérifie qu'elles sont bien définies et inverses l'une de l'autre. □

Proposition 1.1.36
Si K est infini, la topologie de Zariski n'est pas de Hausdorff.

Démonstration. Cela provient du fait que $\mathbb{A}^n$ est irréductible (voir exemple 1.1.30) et du fait que dans un espace irréductible deux ouverts non-vides ont une intersection non-vide. □

1.1.5 Variétés projectives

Le but de cette section est de transposer les résultats précédents aux espaces projectifs. La première différence se situe au niveau de l'évaluation des polynômes : selon le représentant choisi, le résultat ne sera pas le même. On remarque cependant que dans le cas d'un polynôme homogène, puisque notre anneau des polynôme est intègre, la question de savoir si un polynôme s'annule ou pas ne dépend pas du choix du représentant d'une classe d'équivalence. Afin de réaliser cette généralisation aux espaces projectifs, nous allons utiliser les idéaux homogènes de l'anneau gradué des polynômes (voir annexe A.2).

Définition 1.1.37 (Espace projectif de dimension n)
On définit sur $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ la relation d'équivalence $\sim$ suivante : pour tout couple d'éléments non-nuls $a = (a_0, \dots, a_n), b = (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$:

$$a \sim b \text{ si et seulement si } \exists \lambda \in K, (a_0, \dots, a_n) = (\lambda b_0, \dots, \lambda b_n).$$

*L'*espace projectif de dimension n*, noté $\mathbb{P}^n_K$ ou $\mathbb{P}^n$, est alors par définition l'ensemble quotient de $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ par $\sim$.*

Remarque 1.1.38
Si $K = \mathbb{R}$, cela revient à quotienter la sphère S^n par la relation $x \sim -x$. Cela revient à ne considérer que « les directions ».

Définition 1.1.39
Soit $S \subset K[x_0, \dots, x_n]$ un ensemble d'éléments homogènes. On définit

$$\mathcal{V}(S) = \{x \in \mathbb{P}^n : f(x) = 0, \ \forall f \in S\}.$$

Si I est un idéal homogène, on pose

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}\big(\hom(I)\big),$$

où $\hom(I)$ *est l'ensemble des éléments homogènes de I.*

Définition 1.1.40 (Ensemble algébrique de $\mathbb{P}^n$)
Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{P}^n$ est dit algébrique projectif *(ou simplement algébrique) s'il existe un ensemble d'éléments homogènes T tel que $A = \mathcal{V}(T)$.*

Proposition 1.1.41 (Propriétés de base de $\mathcal{V}$)
Soient $I, I', J \subset K[x_0, \ldots, x_n]$ des idéaux homogènes tels que $I \subset I'$ ainsi que $S, S' \subset K[x_0, \ldots, x_n]$ deux ensembles de polynômes homogènes. On a les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{V}(I) \supset \mathcal{V}(I')$;

(ii) $\mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cap J)$;

(iii) $\mathcal{V}(S \cup S') = \mathcal{V}(S) \cap \mathcal{V}(S')$;

(iv) $\mathcal{V}(I + J) = \mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(J)$.

Démonstration. En utilisant les propriétés de base de l'anneau gradué $K[x_0, \ldots, x_n]$, on montre ces résultats de manière analogue au cas affine (proposition 1.1.3). □

Exemples 1.1.42 (Ensembles algébriques)
Quelques exemples d'ensembles algébriques :

(i) $\mathcal{V}(1) = \emptyset$;

(ii) $\mathcal{V}(0) = \mathbb{P}^n$;

(iii) Si $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n$, alors $\{a\}$ est algébrique. En effet, le fait que $a \in \mathbb{P}^n$ entraîne qu'au moins une des composante n'est pas 0, disons a_i. On écrit alors

$$\{a\} = \mathcal{V}\big(x_0 - \frac{a_0}{a_i}x_i, \ldots, x_n - \frac{a_n}{a_i}x_i\big).$$

Définition 1.1.43 (Topologie de Zariski sur l'espace projectif)
On définit une topologie sur $\mathbb{P}^n$ de la manière suivante : un sous-ensemble T de $\mathbb{P}^n$ est fermé si et seulement s'il est un ensemble algébrique. Cette topologie est appelée topologie de Zariski.

Remarque 1.1.44
Les points *(iii)* et *(iv)* (qui se généralise facilement à une somme infinie) de la proposition 1.1.41 permettent d'affirmer qu'il s'agit bien d'une topologie.

Définition 1.1.45 (Variété algébrique affine, variété quasi-projective)
Une variété algébrique projective *ou, plus simplement,* variété projective *est un ensemble algébrique projectif irréductible*[3]*. Un sous-ensemble ouvert d'une variété projective est une* variété quasi-projective*.*

Définition 1.1.46
Soit $A \subset \mathbb{P}^n$. On définit $\mathcal{A}(A)$ comme étant l'idéal engendré par les polynômes homogènes $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ tels que $f(a) = 0$ pour tout $a \in A$.

Proposition 1.1.47 (Propriétés de base de $\mathcal{A}$)
Soient $S \subset S' \subset \mathbb{P}^n$ et V un ensemble algébrique ainsi que I un idéal homogène de $K[x_0, \ldots, x_n]$.

(i) $\mathcal{A}(S) \supset \mathcal{A}(S')$;

(ii) $\mathcal{V}\mathcal{A}(V) = V$;

3. Puisque la notion d'irréductibilité a été présentée dans le cas d'un espace topologique quelconque, il n'y a pas d'adaptation à faire.

(iii) $I \subset \mathcal{AV}(I)$;

(iv) $\bar{S} = \mathcal{VA}(S)$.

Démonstration. Analogue au cas affine (voir proposition 1.1.24 page 6). □

Remarque 1.1.48
On utilise la plupart du temps les mêmes notations pour $\mathcal{V}$ et $\mathcal{A}$ dans le cas affine et projectif. Cependant, si cela s'avère nécessaire, on écrira $\mathcal{V}_{aff}$ et $\mathcal{V}_p$ ainsi que $\mathcal{A}_{aff}$ et $\mathcal{A}_p$.

Une différence fondamentale entre le cas affine et le cas projectif est que même si l'on suppose K algébriquement clos, $\mathcal{V}(I)$ peut être vide pour un idéal propre I. Par exemple, si l'on note R_+ l'idéal $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle$ de R, on trouve que $\mathcal{V}(R_+) = \emptyset$, puisque $0 \notin \mathbb{P}^n$ (dans le cas affine, la proposition 1.1.33 assure que cela ne peut pas se produire).

Définition 1.1.49 (Cône d'un ensemble algébrique projectif)
Soit V un ensemble algébrique projectif. Alors on définit le cône $C(V)$ de V comme étant

$$C(V) = p^{-1}(V) \cup \{0\} \subset \mathbb{A}^{n+1},$$

où $p : \mathbb{A}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ est la projection canonique.

Remarque 1.1.50
Soit $V = \mathcal{V}_p(I)$ un ensemble algébrique projectif non-vide. Alors, on remarque que $C\big(\mathcal{V}_p(I)\big)$ coïncide avec $\mathcal{V}_{aff}(I)$ (à l'élément 0 près).

Théorème 1.1.51 (Le théorème des zéros de Hilbert (cas projectif))
Soit K un corps algébriquement clos et I un idéal homogène de $K[x_0, \ldots, x_n]$. Alors :

(i) *$\mathcal{V}_p(I)$ est vide si et seulement si I contient une puissance de R_+.*

(ii) *Si $\mathcal{V}_p(I)$ n'est pas vide, $\mathcal{A}_p\mathcal{V}_p(I) = \sqrt{I}$.*

Démonstration. (i) Supposons que $\mathcal{V}_p(I)$ soit vide, c'est-à-dire que $\mathcal{V}_{aff}(I) \subset \{0\}$ et donc

$$\sqrt{I} = \mathcal{A}_{aff}\mathcal{V}_{aff}(I) \supset \mathcal{A}_{aff}(\{0\}) = R_+.$$

Ainsi, pour tout $i = 0, \ldots, n$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{N}$ tel que $x_i^{\lambda_i} \in I$. On trouve alors que $\big(R_+\big)^{\lambda_0+\ldots+\lambda_n} \subset I$. La réciproque est claire.

(ii) Supposons donc que $\mathcal{V}_p(I)$ ne soit pas vide. On remarque pour commencer que si f est un polynôme homogène, alors f est nul sur $\mathcal{V}_p(I)$ si et seulement s'il est nul sur $C\big(\mathcal{V}_p(I)\big) \setminus \{0\}$, ce qui implique

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p\mathcal{V}_p(I) &\subset \mathcal{A}_{aff}\big(C(\mathcal{V}_p(I))\big) \\ &= \mathcal{A}_{aff}\mathcal{V}_{aff}(I) = \sqrt{I}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la remarque 1.1.50 et le théorème des zéros de Hilbert du cas affine. L'autre inclusion est analogue au cas affine.

□

Proposition 1.1.52
Soit V un ensemble algébrique de $\mathbb{P}^n$. Alors V est irréductible si et seulement si $\mathcal{A}(I)$ est premier.

Démonstration. Analogue au cas affine (voir proposition 1.1.29 page 6). □

Remarque 1.1.53
Une différence importante entre le cas affine et les cas projectif est que l'anneau de coordonnées homogènes $\Gamma(Y) = K[x_0, \ldots, x_n]/\mathcal{A}(Y)$ d'une variété projective Y n'est pas un invariant (deux variétés projectives isomorphes peuvent avoir des anneaux de coordonnées différents, comme le montre l'exercice 3.9 de [Har77]).

1.2 La catégorie des variétés algébriques

Maintenant que l'on a défini les variétés algébriques affines et projectives, on aimerait pouvoir parler de morphismes entre ces objets et avoir une bonne catégorie dans laquelle travailler ; c'est l'objet de cette section. Les quelques notions de théorie des catégories qui sont utilisées ici peuvent être trouvées dans [Bor94] et [ML98], deux ouvrages de référence sur le sujet.

1.2.1 Applications régulières et morphismes entre les variétés algébriques

Définition 1.2.1 (Application régulière (cas affine))
Soit Y une variété quasi-affine de $\mathbb{A}^n$ et une application $f : Y \longrightarrow K$. L'application f est dite régulière *en $a \in Y$ s'il existe un voisinage ouvert $U \subset Y$ de a et des polynômes $g, h \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tels que h ne s'annule pas sur U et $f = \frac{g}{h}$ sur U. L'application f est dite* régulière *sur Y si elle est régulière en tout point de Y.*

Exemple 1.2.2
Tous les polynômes, quotients de polynômes et leurs restrictions sont des applications régulières.

Proposition 1.2.3
Soit X un espace topologique et $A \subset X$. Alors A est fermé si et seulement s'il existe une collection d'ouverts $\big(U_i\big)_{i \in I}$ recouvrant X telle que $U_i \cap A$ est fermé dans U_i pour tout i.

Démonstration. $\Rightarrow$ Clair.

$\Leftarrow$ Le fait que chaque $U_i \cap A$ soit fermé dans U_i implique l'existence d'une collection de fermés F_i tels que $U_i \cap A = U_i \cap F_i$. On a alors :

$$\begin{aligned} X \setminus A &= \Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) \setminus A \\ &= \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A^c) \\ &= \bigcup_{i \in I} (U_i \cap F_i^c), \end{aligned}$$

ce qui implique que A est fermé.

□

Proposition 1.2.4
Une application régulière est continue (K est identifié avec $\mathbb{A}^1$).

Démonstration. Soit F un fermé de $\mathbb{A}^1$ et $f : Y \longrightarrow \mathbb{A}^1$. Si F est différent de $\mathbb{A}^1$ et de l'ensemble vide, on a $F = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \subset K$. Pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que $f^{-1}(\{\lambda_i\})$ est fermé pour tout i. Pour un élément $a \in Y$, on a l'existence d'un ouvert U_a et de deux polynômes g_a, h_a tels que $f = \frac{g_a}{h_a}$ sur U_a et l'on constate que

$$f^{-1}(\{\lambda_i\}) \cap U_a = \mathcal{V}(g_a - \lambda_i h_a) \cap U_a.$$

On conclut en utilisant la proposition précédente. □

Définition 1.2.5 (Application régulière (cas projectif))
Soit Y une variété quasi-projective de $\mathbb{P}^n$ (voir définition 1.1.45) et une application $f : Y \longrightarrow K$. L'application f est dite régulière *en $a \in Y$ s'il existe un voisinage ouvert $U \subset Y$ de a et des polynômes homogènes de même degré $g, h \in K[x_0, \ldots, x_n]$ tels que h ne s'annule pas sur U et $f = \frac{g}{h}$ sur U. L'application f est dite* régulière *sur Y si elle est régulière en tout point de Y.*

Proposition 1.2.6
Une application régulière dont le domaine est une variété quasi-projective est continue (K est identifié avec $\mathbb{A}^1$).

Démonstration. Analogue au cas affine. □

Remarque 1.2.7
Si $f, g : Y \longrightarrow K$ sont deux applications régulières telles que $f = g$ sur un ouvert V, alors $f = g$ partout. En effet, si A dénote l'ensemble (fermé) des points où $f = g$, alors comme $V \subset A$, on a $Y = \bar{V} = A$.

Définition 1.2.8 (Variété)
Soit K un corps algébriquement clos. Une variété sur K *(ou juste* variété*) regroupe les objets suivants :*

(*i*) *variété (quasi-)affine ;*

(*ii*) *variété (quasi-)projective.*

Définition 1.2.9 (Morphisme entre les variétés)
Soient X et Y deux variétés et $\varphi : X \longrightarrow Y$ une application continue. On dit que φ est un morphisme *si pour tout ouvert V de Y et pour toute fonction régulière $f : V \longrightarrow K$, l'application $f\varphi : \varphi^{-1}(V) \longrightarrow K$ est régulière.*

Exemple 1.2.10 (i) Si $Y \subset \mathbb{A}^1$, toute application régulière est un morphisme, puisqu'une composition d'applications régulières est régulière.

(ii) La loi de groupe et l'opération d'inverse des groupes algébriques (voir section 1.2.3) sont des morphismes.

On remarque que la composition de deux morphismes est un morphisme et que l'identité est un morphisme, ce qui légitime la notation suivante :

Notation 1.2.11 (Catégorie des variétés)
On note **V** la catégorie ayant pour objets les variétés algébriques et les morphismes au sens de la définition ci-dessus. Pour deux variétés algébriques V_1 et V_2 on not $\hom(V_1, V_2)$ l'ensemble des morphismes de V_1 vers V_2.

La proposition suivante donne un critère pour qu'une application soit un morphisme.

Proposition 1.2.12
Soit X une variété et $Y \subset \mathbb{A}^n$ une variété affine. Une application $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un morphisme si et seulement si $x_i\varphi$ est régulière pour tout i, où x_i est l'application

$$\begin{aligned} x_i : Y &\longrightarrow K \\ (a_1, \ldots, a_n) &\longmapsto a_i. \end{aligned}$$

Démonstration. Si φ est un morphisme alors, par définition, $f\varphi$ est régulière pour toute application régulière. Puisque x_i est régulière, $x_i\varphi$ est aussi régulière. Réciproquement, supposons que $x_i\varphi$ soit régulière pour tout i. Cela implique que $g\varphi$ est régulière pour tout polynôme g. Si $F \subset Y$ est un fermé, on a $F = \mathcal{V}(g_1, \dots, g_k)$ pour des polynômes g_i et l'on constate que

$$\varphi^{-1}(F) = \bigcap_{i=1}^{k} (g_i\varphi)^{-1}(\{0\}).$$

Puisque les applications régulières sont continues, $\varphi^{-1}(F)$ est fermé et donc φ est continue. Supposons maintenant que V soit un ouvert de Y et que $f : V \longrightarrow K$ est régulière. Puisque $g\varphi$ est régulière pour tout polynôme g et que f s'écrit localement comme quotient de polynômes, $f\varphi$ s'écrit aussi localement comme un quotient de polynômes. Ainsi, φ est un morphisme. □

Sous-objets

Avant de définir ce que sont les sous-objets des variétés, nous avons besoin de la proposition et de la définition suivantes.

Proposition 1.2.13
Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X. Alors, A est ouvert dans $\bar{A}$ si et seulement si A s'écrit comme l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.

Démonstration. Si A est ouvert dans $\bar{A}$, alors par définition $A = \bar{A} \cap U$, où U est ouvert. Réciproquement, si $A = F \cap U$, où F est fermé et U ouvert. Puisque $A \subset F \subset \bar{A}$, on a $F \cap U = F \cap \bar{A}$, ce qui entraîne que A est ouvert dans $\bar{A}$. □

Définition 1.2.14 (Ensemble localement fermé)
Un sous-ensemble A d'un espace topologique X est dit localement fermé *s'il satisfait l'une des deux conditions de la proposition précédente.*

Exemples 1.2.15 (i) Tout ouvert est localement fermé.

(ii) Dans $\mathbb{R}$, les intervalles fermés d'un côté et ouverts de l'autre sont localement fermés.

(iii) Dans $\mathbb{A}^2$, les cercles et les droites sont fermés. Ainsi, un cercle privé de deux points diamétralement opposé est localement fermé. On peut ainsi construire toute une famille d'ensemble localement fermés en prenant comme ouvert une union d'ensembles du type $\mathbb{A}^2 \setminus d$, pour une droite d, et un cercle C comme fermé.

Définition 1.2.16 (Sous-variété)
Soit X une variété quasi-affine ou quasi-projective et Y un sous-ensemble irréductible localement fermé de X. Puisque la fermeture d'un ensemble irréductible est irréductible (voir proposition 1.1.15), Y devient une variété quasi-affine (respectivement quasi-projective). Dans ce cas, on dit que Y est une sous-variété *de X.*

Remarque 1.2.17 (Restriction des morphismes)
Soient $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme ainsi que X' et Y' des sous-variétés de X et de Y respectivement. Si $\varphi(X') \subset Y'$ alors $\varphi\big|_{X'} : X' \longrightarrow Y'$ est un morphisme.

Produits de variétés affines

Soient $X \subset \mathbb{A}^n$ et $Y \subset \mathbb{A}^m$ deux variétés algébriques affines sur un corps K.

Proposition 1.2.18
L'espace $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$, muni de la topologie induite, est irréductible.

Démonstration. Supposons que Z_1 et Z_2 soient deux fermés tels que $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$. On définit

$$X_i = \{x \in X : \{x\} \times Y \subset Z_i\}, \quad i = 1, 2,$$

et l'on aimerait montrer que $X = X_1 \cup X_2$. Si l'on considère, pour $x \in X$ fixé, l'application

$$\begin{aligned} i_x : Y &\longrightarrow X \times Y \\ y &\longmapsto (x, y), \end{aligned}$$

on constate que l'une des préimages $i_x^{-1}(Z_i)$ doit être vide (puisque Y est irréductible). Soit maintenant $x \in X$. Si x n'appartient pas à $X_1 \cup X_2$, il existe $y_1, y_2 \in Y$ tels que $(x, y_i) \notin Z_i$, ce qui implique que $(x, y_1) \in Z_2$ et $(x, y_2) \in Z_1$, contredisant le fait que l'une des préimages doit être vide. Pour $y \in Y$, on définit une application $i_y : X \longrightarrow X \times Y$ comme ci-dessus et l'on constate que

$$X_i = \bigcap_{y \in Y} {i_y}^{-1}(Z_i),$$

ce qui implique que X_i est fermé. Puisque X est irréductible, on obtient $X_1 = \emptyset$ ou $X_2 = \emptyset$, ce qui implique que l'un des Z_i est vide, comme désiré. □

Corollaire 1.2.19
Le produit direct de deux variétés affines algébriques affines est une variété affine.

Remarque 1.2.20
On rappelle que la topologie sur $\mathbb{A}^{n+m}$ n'est pas la topologie du produit de $\mathbb{A}^n$ avec $\mathbb{A}^m$ (voir remarques 1.1.10).

Proposition 1.2.21
Le produit direct de deux variétés affines correspond bien à un produit (du point de vue catégorique).

Démonstration. On considère la projection $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$. Si $f : V \subset X \subset \mathbb{A}^n \longrightarrow K$ est une application, on aura :

$$f\pi_X(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Ainsi, si f est régulière, alors $f\pi_X$ est régulière et donc les projections sont des morphismes. Supposons maintenant que l'on ait une variété affine $Z \subset \mathbb{A}^r$ ainsi que deux morphismes p_X et p_Y comme dans le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, dashed, "\varphi"] \arrow[ddl, bend right, "p_X"'] \arrow[ddr, bend left, "p_Y"] & \\
& X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & \\
X & & Y.
\end{tikzcd}
$$

On définit alors

$$
\begin{aligned}
\varphi : Z &\longrightarrow X \times Y \\
(x_1, \dots, x_r) &\longmapsto \big(p_X(x_1, \dots, x_r), p_Y(x_1, \dots, x_r)\big),
\end{aligned}
$$

et l'on vérifie que φ est un morphisme et rends le diagramme commutatif. Si, maintenant, $\tilde{\varphi}$ est une autre morphisme faisant commuter le diagramme, on a :

$$\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_r) = \big(\tilde{\varphi}_X(x_1, \dots, x_r), \tilde{\varphi}_Y(x_1, \dots, x_r)\big),$$

et on trouve que $\tilde{\varphi}_X = p_X$ (de même pour Y), ce qui entraîne l'unicité. □

Proposition 1.2.22 (Comportement de Γ par rapport au produit)
Si X et Y sont comme ci-dessus, on a

$$\Gamma(X \times Y) \cong \Gamma(X) \otimes_K \Gamma(Y).$$

Démonstration. Provient du fait que le foncteur Γ induit une équivalence de catégories contravariante entre la catégorie des variétés affines sur un corps K et celle des algèbres réduites de type fini (théorème 1.2.35) et du fait que le produit tensoriel de deux algèbres est leur coproduit (voir, par exemple, la proposition 5.6 de [Gri07]). □

1.2.2 Propriétés supplémentaires des variétés algébriques

Définition-Notation 1.2.23 (Anneau des fonctions régulières, anneau local)
Soit Y une variété. On note $\mathcal{O}(Y)$ l'anneau des fonctions régulières sur Y. Pour un élément $y \in Y$, on définit l'anneau local Y en y, noté $\mathcal{O}_{y,Y}$ ou juste $\mathcal{O}_y$, comme étant l'anneau des germes de fonctions régulières en y : on définit sur l'ensemble des couples (U, f), où U est un ouvert de Y et $f : U \longrightarrow K$ est une application régulière, une relation :

$$(U, f) \sim (V, g) \text{ si et seulement si } f\big|_{U \cap V} = g\big|_{U \cap V}.$$

La remarque 1.2.7 permet de montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et on définit $\mathcal{O}_{y,Y}$ comme étant l'ensemble quotient.

Remarque 1.2.24
L'appellation d'anneau local dans la définition ci-dessus n'est pas usurpée. En effet, si l'on note I l'idéal engendré par les fonctions régulières qui s'annulent en y, on trouve que I est un idéal maximal (tout idéal plus grand contient une fonction ne s'annulant pas en y qui est donc inversible localement, par continuité). Maintenant, si J est un autre idéal propre de $\mathcal{O}_{y,Y}$, il sera inclu dans I. Via l'homomorphisme d'évaluation en y, on constate que $\mathcal{O}_{y,Y}/_I \cong K$.

Remarque 1.2.25
On remarque que $\mathcal{O}$ est un foncteur contravariant de la catégorie des variétés dans celle des anneaux. En effet, si $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un morphismes de variétés, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\varphi : \mathcal{O}(Y) &\longrightarrow \mathcal{O}(X) \\ f &\longmapsto f\varphi. \end{aligned}$$

Et $f\varphi$ est régulière, puisque φ est un morphisme.

Définition 1.2.26 (Corps des fonctions, fonction rationnelle)
Soit Y une variété. On définit une relation d'équivalence sur les paires (U, f), où U est un ouvert non-vide de Y et $f : U \longrightarrow K$ est régulière, de la manière suivante :

$$(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow f\big|_{U\cap V} = g\big|_{U\cap V}.$$

L'ensemble quotient est appelé corps des fonctions *de Y et est noté $K(Y)$. Une classe d'équivalence est appelée* fonction rationnelle *sur Y.*

Lemme 1.2.27
Le corps des fonctions défini ci-dessus est un corps.

Démonstration. On vérifie qu'il s'agit effectivement d'un corps :

(i) Soient $[(U, f)]$ et $[(V, g)]$ deux éléments de $K(Y)$. Puisque Y est une variété et que U et V sont non-vides, on a $U \cap V \neq \emptyset$. On pose alors :

$$[(U, f)] + [(V, g)] = \big[(U \cap V, f + g)\big],$$

qui est bien définie. On fait de même pour définir le produit.

(ii) Soit $[(U, f)]$ une fonction rationnelle non-nulle. On peut poser

$$[(U, f)]^{-1} = \left[\left(U \setminus \mathcal{V}(f), \frac{1}{f}\right)\right],$$

car le fait que $[(U, f)]$ soit non-nulle implique que $U \setminus \mathcal{V}(f)$ est non-vide. A nouveau, on vérifie que cette opération est bien définie : si $(U, f) \sim (V, g)$ alors $f = g$ sur $U \cap V$ et, puisque $U \setminus \mathcal{V}(f) \cap V \setminus \mathcal{V}(g) \subset U \cap V$, les inverses de (U, f) et de (V, g) seront équivalents.

□

Théorème 1.2.28
Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ une variété affine et son anneau de coordonnées $\Gamma(Y)$. Alors :

(*i*) $\mathcal{O}(Y) \cong \Gamma(Y)$.

(*ii*) *Pour tout point $y \in Y$ on pose $M_y \subset \Gamma(Y)$ l'idéal constitué des fonctions s'annulant en y. Alors, l'application φ qui envoie y sur M_y établit une correspondance bijective entre les points de Y et les idéaux maximaux de $\Gamma(Y)$.*

Démonstration. (i) Voir [Har77].

(ii) Si M_y est comme ci-dessus, on a $\Gamma(Y)/_{M_y} \cong K$, ce qui implique que M_y est maximal. Soit $\bar{I}$ un idéal maximal de $\Gamma(Y)$. Le théorème de correspondance nous donne un idéal maximal I de $K[x_1, \dots, x_n]$ contenant $\mathcal{A}(Y)$. La proposition 1.1.31 implique que l'on a $I = \langle x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n\rangle$ pour $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^n$ et l'on pose $\psi(\bar{I}) = y$. On constate alors que les applications φ et ψ sont inverses l'une de l'autre.

□

La proposition suivante établit le lien entre les variétés projectives et les variétés affines.

Proposition 1.2.29
Pour $i = 0, \dots, n$ on définit le sous-ensemble de $\mathbb{P}^n$ suivant

$$P_i = \big\{[(a_0, \dots, a_n)] \in \mathbb{P}^n : a_i \neq 0\big\}$$

et l'on considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi_i : P_i &\longrightarrow \mathbb{A}^n \\ [(a_0, \dots, a_n)] &\longmapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right). \end{aligned}$$

Alors φ_i est un isomorphisme de variétés.

Démonstration. **Bijectivité** On a $\varphi_i\big(b_1, \dots, b_{i-1}, 1, b_i, \dots, b_n\big) = (b_1, \dots, b_n)$ pour tout $b \in \mathbb{A}^n$. Pour l'injectivité, on remarque que l'égalité $\varphi_i([a]) = \varphi_i([b])$ implique que $a_k = \frac{a_i}{b_i} b_k$ pour tout $k \neq i$.

Continuité Soit $V = \mathcal{V}_{aff}(I)$ un sous-ensemble fermé de $\mathbb{A}^n$. Alors, on a

$$\varphi_i^{-1}(V) = P_i \cap \mathcal{V}_p \left\{ {x_i}^{\partial f} \cdot f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) : f \in I \right\}.$$

Application fermée Soit $V = \mathcal{V}_p(T) \cap P_i$ un fermé de P_i. Alors, on a

$$\varphi_i(\mathcal{V}_p(T) \cap P_i) = \mathcal{V}_{aff}\left(\big\{f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) : f \in T\big\}\right).$$

Morphisme Soit $f : V \subset \mathbb{A}^n \longrightarrow K$ une application régulière. On aimerait montrer que $f\varphi_i^{-1} : \varphi_i^{-1}(V) \longrightarrow K$ est régulière. Si l'on considère un point $[\alpha] \in P_i$, on a l'existence d'un voisinage ouvert W de $\varphi_i([\alpha])$ et de deux polynômes g, h tels que $f = \frac{g}{h}$ sur W. On constate alors que $f\varphi_i^{-1}$ s'écrit localement comme un quotient de deux polynômes homogènes de même degré.
Le fait que l'application inverse soit un morphisme se prouve de manière analogue.

□

Corollaire 1.2.30
Si Y est une variété projective (respectivement quasi-projective), Y est recouverte par des ouverts $Y \cap U_i$ qui sont isomorphes à des variétés affines (respectivement quasi-affines) via les φ_i.

Proposition 1.2.31
Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ l'hypersurface donnée par $\mathcal{V}(f)$, où $f \in K[x_1, \dots, x_n]$. Alors, $\mathbb{A}^n \setminus Y$ est isomorphe à H, où H est donnée par l'équation $x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Démonstration. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}^n \setminus Y &\longrightarrow H \\ a &\longmapsto \left(a_1, \dots, a_n, \frac{1}{f(a)}\right), \end{aligned}$$

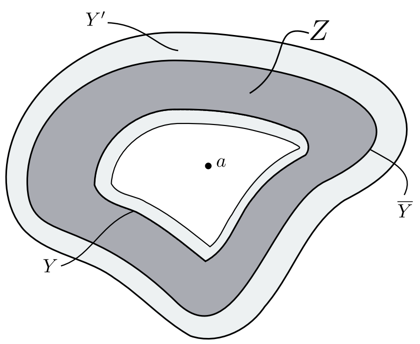
qui est bien définie, puisque $f(a) \neq 0$. Clairement, l'application φ est bijective. Le fait que

$$x_i\,\varphi(a) = \begin{cases} a_i & i \leq n \\ \frac{1}{f(a)} & i = n+1 \end{cases}$$

entraîne que φ est un morphisme (proposition 1.2.12). Comme φ^{-1} est la restriction de la projection de $\mathbb{A}^{n+1}$ sur $\mathbb{A}^n$ à H, la proposition 1.2.12 entraîne que φ^{-1} est un morphisme. Ainsi, φ est un isomorphisme. □

Proposition 1.2.32
Soit Y une variété. Alors, il existe une base pour la topologie constituée d'ouvert affines.

Démonstration. On doit montrer que pour tout $a \in Y$ et tout voisinage ouvert U de a, il existe un ouvert affine V tel que $x \in V \subset U$. Puisque U est une quasi-variété, on peut supposer que $U = Y$. De plus, le corollaire précédent nous permet de supposer que Y est une variété affine. Ainsi, pour tout $a \in Y \subset \mathbb{A}^n$, on doit exhiber un voisinage affine V de a. On commence par poser $Z = \overline{Y} \setminus Y$, qui est un fermé de $\mathbb{A}^n$. Si l'idéal I est tel que $\mathcal{V}(I) = Z$, alors il existe $f \in I$ tel que $f(a) \neq 0$, puisque $a \notin Z$. Si l'on appelle Y' l'hypersurface définie par $\mathcal{V}(f)$, on a $\mathbb{A}^n \setminus Y' \cong H \subset \mathbb{A}^{n+1}$, par la proposition précédente. L'ensemble $Y \setminus (Y \cap Y')$, qui contient a, est un ouvert de Y. Puisque $Y \setminus (Y \cap Y')$ est un fermé de $\mathbb{A}^n \setminus Y' \cong H$, qui est une variété affine, $Y \setminus (Y \cap Y')$ est le voisinage recherché. La figure suivante résume la situation :



□

Soient V et W deux variétés affines et $\varphi : V \subset \mathbb{A}^m \longrightarrow W \subset \mathbb{A}^n$ un morphisme. On constate que l'on peut associer à chaque polynôme $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ une application $f\varphi$ et que cette association passe au quotient :

$$\begin{aligned} \Gamma\varphi : K[x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{A}(W) &\longrightarrow K[x_1, \ldots, x_m]/\mathcal{A}(V) \\ [f] &\longmapsto [f\varphi]. \end{aligned}$$

On obtient donc un foncteur contravariant de la catégorie des variétés affines sur un corps K dans la catégorie des algèbres de type fini sur K :

$$\Gamma : \mathbf{V}^K_{aff} \longrightarrow \mathbf{Alg}^f_K.$$

Proposition 1.2.33
Le foncteur Γ est pleinement fidèle.

Démonstration. Soient X et Y deux variétés affines sur un corps K. Il faut montrer que Γ induit une bijection $\gamma_{X,Y}$:

$$\gamma_{X,Y} : \hom(X, Y) \longrightarrow \hom\big(\Gamma(Y), \Gamma(X)\big).$$

Pour voir que $\gamma_{X,Y}$ est injectif, supposons que $\varphi, \psi : X \longrightarrow Y$ soient deux morphismes tels que $\Gamma(\varphi) = \Gamma(\psi)$. Montrer que $\varphi = \psi$ est équivalent à montrer que $\epsilon_i\varphi = \epsilon_i\psi$, pour $i = 1, \ldots, m$, où $\epsilon_i : X \longrightarrow Y$ est la i-ème fonction de coordonnée. Pour cette fonction de coordonnée on a, par hypothèse

$$\epsilon_i\varphi - \epsilon_i\psi = \eta_i,$$

où $\eta_i \in \mathcal{A}(X)$, ce qui implique que $\epsilon_i\varphi$ et $\epsilon_i\psi$ coïncident sur X.
Soit maintenant un morphisme $\psi : \Gamma(Y) \longrightarrow \Gamma(X)$. On définit une application :

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{A}^m \\ a &\longmapsto \Big(\psi\big(\bar{x}_1\big)(a), \ldots, \psi\big(\bar{x}_m\big)(a)\Big). \end{aligned}$$

Puisque $Y = \mathcal{V}\mathcal{A}(Y)$, montrer que $\operatorname{im}\varphi \subset Y$ est équivalent à montrer que $f\varphi(a) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{A}(Y)$. Le fait que f est un polynôme et que ψ est un homomorphisme d'algèbres entraîne que

$$0 = \psi\big(f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)\big)(a) = f\Big(\psi\big(\bar{x}_1\big)(a), \ldots, \psi\big(\bar{x}_m\big)(a)\Big),$$

comme désiré. On utilise à nouveau le fait que ψ soit un homomorphisme d'algèbre pour voir que $\Gamma(\varphi) = \psi$.
Il reste à montrer que φ est un morphisme, ce qui est équivalent, par la proposition 1.2.12, à montrer que $\epsilon_i\varphi$ est régulière pour tout $i = 1, \ldots, m$. Or, on a $\epsilon_i\varphi = \psi\big(\bar{x}_i\big)$, qui est régulière par définition de ψ. □

Remarque 1.2.34
Si A est une K-algèbre de type fini, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ et I un idéal tel que $A \cong K[x_1, \ldots, x_m]/_I$. Si A est réduite, l'idéal I est radical. En effet, si cela n'est pas le cas, il existe un polynôme f et un entier k tel que $f^m \in I$ et $f \notin I$, contredisant le fait que A est réduite.

Théorème 1.2.35
Si K est un corps algébriquement clos, le foncteur $\Gamma : \mathbf{V}^K_{aff} \longrightarrow \mathbf{Alg}^{f,r}_K$ induit une équivalence de catégories.

Démonstration. Un théorème classique (voir, par exemple, *iv*.4 de [ML98]) et la proposition précédente impliquent qu'il nous suffit de vérifier que Γ est essentiellement surjectif. Pour cela, on considère une K-algèbre réduite de type fini A, c'est-à-dire $A \cong K[x_1, \ldots, x_n]/_I$ pour un idéal radical I (voir remarque précédente). On trouve alors que $A \cong \Gamma\big(\mathcal{V}(I)\big)$. □

1.2.3 Groupes algébriques

Avant de continuer vers les applications rationnelles, je réalise une petite excursion du côté des groupes algébriques.

Définition 1.2.36 (Groupe algébrique)
Un groupe algébrique *consiste en une variété Y munie d'une structure de groupe telle que l'opération de multiplication $\mu : Y \times Y \longrightarrow Y$ et l'inverse $y \longmapsto y^{-1}$ soient des morphismes.*

Exemple 1.2.37 (Groupe additif)
Le groupe additif, que l'on note G_{add}, est donné par la variété $\mathbb{A}^1$, le morphisme $\mu(a,b) = a+b$ et l'inverse $i(a) = -a$. On vérifie que les deux applications sont des morphismes :

(i) Pour voir que μ est continu, on considère $c \in \mathbb{A}^1$. Alors :

$$\mu^{-1}\big(\{c\}\big) = \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 : a+b = c\} = \mathcal{V}(x_1 + x_2 - c),$$

comme désiré. Le fait que μ soit une application régulière est clair.

(ii) L'application inverse $i : a \longmapsto -a$ étant bijective, il s'agit d'un morphisme.

Exemple 1.2.38 (Groupe multiplicatif)
Le groupe multiplicatif, que l'on note G_m, possède comme ensemble sous-jacent $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, comme loi $\mu(a,b) = ab$ et comme inverse $i(a) = a^{-1}$. A nouveau, on vérifie que les deux opérations sont des morphismes sur cette variété quasi-affine.

(i) Pour tout $c \in G_m$, on a :

$$\mu^{-1}(c) = \mathcal{V}(x_1 x_2 - c).$$

(ii) L'application inverse $i : a \longmapsto a^{-1}$ étant une bijection, il s'agit d'un morphisme.

Exemple 1.2.39
Pour $n \in \mathbb{N}$ et K un corps algébriquement clos, $\mathrm{SL}_n(K)$ est une variété affine : on peut identifier l'ensemble des matrices $n \times n$ à $\mathbb{A}^{n^2}$ et SL_n est constitué des éléments annulant l'application polynomiale $\det -1$. Le produit de matrices et leur inversion étant définis par des opérations polynômiales, il s'agit de morphismes de variétés. Ainsi, $\mathrm{SL}_n(K)$ est un groupe algébrique.

Remarque 1.2.40
Si G est un groupe algébrique et X une variété, alors $\hom(X,G)$ possède une structure de groupe induite par celle de G : pour tout couple $f,g \in \hom(X,G)$ on a

$$(f+g)(x) = \mu\big(f(x), g(x)\big), \quad \forall x \in X.$$

Proposition 1.2.41
Soit X une variété. Alors $\hom(X, G_{add}) \cong \mathcal{O}(X)$ (en tant que groupes additifs).

Démonstration. On définit l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \hom(X, G_{add}) &\longrightarrow \mathcal{O}(X) \\ \varphi &\longmapsto \Phi(\varphi) : X \longrightarrow \mathcal{A}^1 \cong K, x \longmapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

Si φ est un élément de $\hom(X, G_{add})$ alors, en particulier, φ est un morphisme, ce qui implique que $\Phi(\varphi) \in \mathcal{O}(X)$. On varifie facilement qu'il s'agit d'un isomorphisme de groupes. □

Proposition 1.2.42
Soit X une variété. Alors $\hom(X, G_m) \cong \mathcal{O}(X)^*$ (en tant que groupes).

Démonstration. On procède comme ci-dessus. □

1.2.4 Applications rationnelles

Lemme 1.2.43
Soient X et Y deux variétés ainsi que $X \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$ *deux morphismes. S'il existe un ouvert $U \subset X$ non-vide tel que $\varphi|_U = \psi|_U$, alors $\varphi = \psi$.*

Démonstration. Voir [Har77]. □

Définition 1.2.44 (Application rationnelle)
Pour deux variétés X et Y, on définit une relation sur les couples (U, φ_U), où U est un ouvert non-vide de X et $\varphi : U \longrightarrow Y$ est un morphisme, de la manière suivante :

$$(U, \varphi_U) \sim (V, \psi_V) \Leftrightarrow \varphi_U|_{U \cap V} = \psi_V|_{U \cap V}.$$

A l'aide du lemme précédent, on vérifie facilement qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Une application rationnelle *$\varphi : X \longrightarrow Y$ est une classe d'équivalence pour cette relation.*

Remarque 1.2.45
Puisque X est irréductible, on n'a pas besoin de préciser que $U \cap V$ doit être non-vide.

Exemple 1.2.46
Les morphismes entre les variétés sont des applications rationnelle.

Définition 1.2.47 (Application rationnelle dominante)
Une application rationnelle est dite dominante *si l'image de φ_U est dense dans Y pour un représentant (U, φ_U).*

Remarque 1.2.48
Si φ_U est dominante, alors tout représentant de sa classe le sera aussi.

Exemple 1.2.49
Soit $X = \mathbb{A}^2 \setminus \mathcal{V}(x_1 \cdot x_2)$, le plan privé des deux axes et $p_1 : X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ l'application qui envoie (a, b) sur a. Alors $p_1(X)$ est ouvert, ce qui implique que $\overline{p_1(X)} = \mathbb{A}^1$, puisque $\mathbb{A}^1$ est irréductible.

On remarque qu'une application rationnelle $\varphi : X \longrightarrow Y$ n'est pas forcément définie sur tout X, ce qui implique qu'il n'est pas forcément possible de composer deux applications rationnelles. Par contre, si $\varphi : X \longrightarrow Y$ est dominante et si $\psi : Y \longrightarrow Z$ est rationnelle, la composition $\psi \circ \varphi$ devient possible. En effet, si (U, φ_U) et (V, ψ_V) sont deux représentants pour φ et ψ respectivement, on a $\varphi_U(U) \cap V \neq \emptyset$, ce qui implique que l'on peut composer :

$$\psi\varphi : {\varphi_U}^{-1}(V) \cap U \longrightarrow Z.$$

Cette remarque, et le fait que la composition d'applications rationnelles dominantes est dominante, suggèrent de considérer la catégorie des variétés ayant pour morphismes les applications dominantes.

Définition 1.2.50 (Application birationnelle)
Dans la catégorie ayant pour objets les variétés et pour morphismes les applications rationnelles dominantes, les isomorphismes sont appelés applications birationnelles. *S'il existe une application birationnelle entre les variétés X et Y ont dit qu'elles sont* birationnellement équivalentes.

Remarque 1.2.51
Deux variétés X et Y sont birationnellement équivalentes s'il existe des ouverts U de X et V de Y respectivement tels que U et V soient isomorphes. En particulier, l'inclusion d'une sous-variété ouverte dans sa variété définit une équivalence birationnelle.

Soient $\varphi : X \longrightarrow Y$ une application rationnelle dominante entre deux variétés sur un corps K et (U, φ_U) un représentant de φ. Soit de plus $[(V, f)] \in K(Y)$ (voir définition 1.2.26), où V est un ouvert de Y. Puisque φ est dominante, $f\varphi_U$ est une fonction régulière sur $\varphi_U^{-1}(V)$. Cette association nous donne un homomorphisme de K-algèbres entre $K(Y)$ et $K(X)$.

Le théorème suivant exprime l'importance des applications rationnelles :

Théorème 1.2.52
Pour deux variétés X et Y sur un corps K, il y a une bijection naturelle entre l'ensemble $\hom(X, Y)$ *des applications rationnelles dominantes et l'ensemble des homomorphismes de K-algèbres* $\hom\big(K(Y), K(X)\big)$. *Cette bijection donne lieu à une équivalence de catégorie entre la catégorie des variétés sur K (ayant comme morphismes les applications dominantes) et celle des extensions de K de type fini.*

Démonstration. Théorème I, 4.4 de [Har77]. □

Exemple 1.2.53
Le fait que deux variétés soient birationnellement équivalentes est plus faible qu'un isomorphisme de variétés. Par exemple si on considère $X = \mathbb{P}^2$ et $Y \subset \mathbb{P}^3$ constituée des classes $[(x, y, z, t)]$ satisfaisant l'équation $yz = xt$, on trouve que X et Y sont birationnellement équivalentes mais non-isomorphes. Dans $\mathbb{P}^2$, deux plans (par exemple ceux définis par les équations $x = 0$ et $y = 0$) ont toujours une intersection non-nulle tandis que les plans donnés par $x = y = 0$ et $y = t = 0$ dans Y ont une intersection vide (l'intersection serait en $(0, 0, 0, 0)$). On montre alors, en utilisant le théorème I, 3.4 de [Har77], que ces deux variétés ont le même corps des fonctions (et sont donc birationnellement équivalentes).

Chapitre 2

Géométrie algébrique moderne

2.1 Pré-faisceaux et faisceaux

L'utilisation de pré-faisceaux se présente de manière naturelle lorsque l'on travaille avec des variétés (topologiques, complexes, différentiables, etc) : dans un voisinage d'un point de la variété, on peut se donner un ensemble de « bonnes » fonctions. Par exemple, si U est un ouvert d'une variété différentiable, on peut s'intéresser aux applications C^∞ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La somme (et le produit) de telles fonctions reste C^∞ ce qui motive à associer à chaque ouvert U de la variété un groupe abélien (ou, respectivement, un anneau). Dans le cas des applications C^∞, si $V \subset U$ est un autre ouvert, on peut restreindre une application à V de manière à avoir une application C^∞ sur V. La généralisation de cette idée conduit à demander l'existence d'un homomorphisme de groupes entre les groupes associés à U et à V. Ces propriétés conduisent à définir le concept de pré-faisceau (définition 2.1.4). D'une manière générale, on veut pouvoir combiner de telles données locales afin d'en déduire une information globale : si l'on possède un recouvrement ouvert d'une variété différentiable et, pour chaque ouvert, une application différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que ces applications coïncident sur les intersections, on veut définir une application différentiable globale dont les restrictions sont les fonctions de départ. Les structures qui permettent ce passage du local au global sont les faisceaux (définition 2.1.8).

Les premiers éléments de la théorie des faisceaux ont été mis au point par Jean Leray dans ses travaux sur la topologie algébrique (en partie réalisés alors qu'il était prisonnier dans un camp, en Autriche, entre 1940 et 1945) publiés en 1946. Différents développements ont été réalisés postérieurement par Cartan, Grothendieck et Serre (un développement historique plus précis peut être trouvé dans [DD89]).

Dans cette section, on présente les notions de pré-faisceau et faisceau sur un espace topologique, celle de morphismes de pré-faisceaux, ainsi que leurs premières propriétés : injectivité et surjectivité, suites exactes, premier théorème d'isomorphisme, etc. On étudie ensuite les foncteurs d'image directe et d'image inverse, qui permettent de passer d'un faisceau sur un espace topologique à un faisceau sur un autre espace et qui jouent un rôle fondamental dans l'étude des schémas, qui sont présentés plus bas. Enfin, on termine par l'étude des recollements de faisceaux.

2.1.1 Premières définitions

Notation 2.1.1
Soit X un espace topologique. On note $\mathscr{T}_X$ la catégorie ayant pour objets les ouverts

de X et pour morphismes les applications identité et les inclusions.

Définition 2.1.2 (Pré-faisceau (définition générale))
Soit X un espace topologique et $\mathscr{C}$ une catégorie. Un pré-faisceau *sur X à valeurs dans $\mathscr{C}$ est un foncteur contravariant de X dans $\mathscr{C}$.*

Exemple 2.1.3
Si M est une variété différentiable, on obtient un pré-faisceau sur $\mathscr{T}_M$ à valeurs dans **Set**, la catégorie des ensembles, en considérant le foncteur $C^\infty(-,\mathbb{R})$.

Pour certains auteurs, il est nécessaire que la catégorie $\mathscr{C}$ possède un objet terminal T et que $\emptyset$ soit envoyé sur T. J'adopte ici ce point de vue, pour suivre ce qui est fait dans [Har77] et utiliserai uniquement $\mathscr{C} = \mathbf{Ab}$ (voire, occasionnellement, $\mathscr{C} = \mathbf{Rng}$). Ainsi, la définition devient :

Définition 2.1.4 (Pré-faisceau)
Soit X un espace topologique. Un pré-faisceau *sur X est un foncteur contravariant $\mathscr{F}$ de $\mathscr{T}_X$ dans $\mathbf{Ab}$ tel que $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$.*

Notation 2.1.5
Pour un tel pré-faisceau, on note $\rho_{UV} : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(V)$ le morphisme associé aux ouverts $V \subset U$. De plus, si $s \in \mathscr{F}(U)$, $\rho_{UV}(s)$ pourra être noté $s|_V$.

Les applications ρ_{UV} ci-dessus sont appelées *restrictions* tandis que $\mathscr{F}(U)$ est appelé *objet des sections* de $\mathscr{F}$ sur U.

Convention 2.1.6
Dans ce qui suit, sauf mention du contraire, un faisceau désignera toujours un faisceau sur un espace topologique X et U ainsi que V seront utilisées pour désigner deux ouverts de X.

Définition 2.1.7 (Morphismes de pré-faisceaux)
Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux pré-faisceaux sur X. Un morphisme *de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{G}$ est une transformation naturelle $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$.*

Définition 2.1.8 (Faisceau)
Soit X un espace topologique. Un pré-faisceau $\mathscr{F}$ sur X est un faisceau *s'il satisfait aux conditions supplémentaires suivantes :*

(*i*) *Si U est un ouvert possédant un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ et si $s \in \mathscr{F}(U)$ est tel que $s\big|_{U_i} = 0$ pour tout i, alors $s = 0$.*

(*ii*) *Si U est un ouvert possédant un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ et si $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ est une collection d'éléments telle que $s_i\big|_{U_i\cap U_j} = s_j\big|_{U_i\cap U_j}$ pour tous $i, j \in I$, alors il existe $s \in \mathscr{F}(U)$ tel que $s\big|_{U_i} = s_i$ pour tout i.*

Remarques 2.1.9 (i) La condition (*i*), appelée parfois *condition de localité*, est équivalente à dire que si $s, t \in \mathscr{F}(U)$ sont tels que $s\big|_{U_i} = t\big|_{U_i}$ pour tout i, alors $s = t$.

(ii) La première remarque implique que le s donné en (*ii*) est unique.

(iii) Si l'on choisit un groupe abélien A et que l'on pose $\mathscr{F}(U) = A$ pour tout ouvert U non-vide et que X contient deux ouverts disjoints, il est facile de voir que la condition (*ii*), appelée parfois *condition de recollement*, pourra être mise en défaut.

Notation 2.1.10
La catégorie ayant pour objets les faisceaux sur un espace topologique X et les morphismes données par la définition 2.1.7 est notée $\mathfrak{Ab}(X)$.

Exemple 2.1.11 (Faisceau des applications régulières)
Pour une variété X, le foncteur $\mathcal{O}$ (voir remarque 1.2.25 page 18), restreint à $\mathscr{T}_X$, est un faisceau [1]. Soit U un ouvert de X et $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de U.

(i) Supposons que $s \in \mathcal{O}(U)$ soit tel que $s\big|_{U_i} = 0$ pour tout i. On a alors $s = 0$ (en fait, il suffirait que $s\big|_{U_i} = 0$ pour un i).

(ii) Si $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ est une collection d'éléments telle que $s_i\big|_{U_i\cap U_j} = s_j\big|_{U_i\cap U_j}$ pour tous $i, j \in I$, alors on peut définir une application $s : U \longrightarrow K$. Le fait que la régularité est une condition locale implique que s est régulière.

Exemple 2.1.12 (Faisceau des applications localement constantes)
Si pour tout espace topologique Y on note par $\mathcal{C}(Y)$ l'anneau des fonctions de Y dans K qui sont localement constantes, alors on obtient un faisceau $\mathcal{C}$.

Exemple 2.1.13 (Faisceau constant)
Soit X un espace topologique et A un groupe abélien, que l'on considère muni de la topologie discrète. On pose alors, pour tout ouvert U de X

$$\mathscr{F}(U) = \big\{f : U \longrightarrow A \,|\, f \text{ continue}\big\}.$$

Il est clair qu'il s'agit d'un faisceau. On l'appelle *faisceau constant* dans A. On constate que si U est un ouvert connexe non-vide, alors $\mathscr{F}(U) \cong A$. En effet, si l'on fixe $u \in U$, on peut définir l'homomorphisme surjectif suivant :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{F}(U) &\longrightarrow A \\ f &\longmapsto f(u). \end{aligned}$$

Si $\varphi(f) = \varphi(g)$, alors $(f - g)^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ est ouvert et fermé, ce qui implique que $f = g$.

Exemple 2.1.14
Pour $X = \mathbb{R}$, le pré-faisceau $U \longmapsto \mathscr{F}(U)$ des fonctions Lebesgue-intégrables sur U n'est pas un faisceau. En effet, si l'on considère le recouvrement de $\mathbb{R}$ constitué des $U_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, la fonction $f_n : U_n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1$ est intégrable mais ne l'est pas sur $\mathbb{R}$, ce qui met en défaut la condition de recollement.

La prochaine construction utilise les limites directes (ou inductives). Leur définition et quelques exemples se trouvent dans [Gug10].

Définition 2.1.15 (Germes d'un pré-faisceau)
Soit $\mathscr{F}$ un pré-faisceau d'un espace topologique X et $x \in X$. On vérifie que l'ensemble des voisinages ouverts de x, muni de la relation d'ordre

$$U \leq V \Leftrightarrow V \subset U$$

est un ensemble filtrant et que cela induit un système inductif. On pose alors

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathscr{F}(U),$$

où U parcourt tous les ouverts contenant x. Ce groupe est appelé germe *de $\mathscr{F}$ en x.*

1. Au vu de la définition de $\mathcal{O}$, on comprend mieux pourquoi les morphismes ρ_{UV} sont appelés applications de restriction.

La caractérisation de la limite inductive de groupes implique que deux représentants (U,s) et (V,t) sont dans la même classe si et seulement s'il existe un voisinage ouvert W de x contenu dans $U \cap V$ tel que $s|_W = t|_W$.

Notation 2.1.16
Afin d'alléger l'écriture, on notera parfois $[U,s]$ au lieu de $[(U,s)]$, pour désigner la classe de (U,s).

Exemple 2.1.17
Dans le cas où $\mathscr{F}$ est le faisceau des applications régulières, la condition $s|_W = t|_W$ est équivalente à dire que les applications s et t coïncident sur un voisinage ouvert W de x. Ainsi, on trouve que $\mathscr{F}_x$ est l'anneau local $\mathcal{O}_{x,X}$.

2.1.2 Premières propriétés

Le fait qu'un morphisme $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ soit une transformation naturelle implique que cela induit un morphisme de systèmes inductifs, c'est-à-dire que le carré central du diagramme suivant commute pour tous $x \in V \subset U$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\alpha(U)"] \arrow[dl] \arrow[d] & \mathscr{G}(U) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathscr{F}_x & & & \mathscr{G}_x \\
 & \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\alpha(V)"'] \arrow[ul] & \mathscr{G}(V) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Dans ce cas, la propriété universelle de la limite directe entraîne l'existence d'un homorphisme $\alpha_x : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$ pour tout x.

Sauf mention du contraire, tous les (pré-)faisceaux considérés sont sur le même espace topologique X.

Proposition 2.1.18
Soit X un espace topologique ainsi que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux faisceaux sur X. Un morphisme $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ est un isomorphisme si et seulement si α_x est un isomorphisme pour tout x.

Démonstration. Si α est un isomorphisme, alors chacune de ses composantes α_U l'est aussi, ce qui implique que l'homorphisme induit $\alpha_x : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$ est un isomorphisme pour tout x.
Réciproquement, supposons que α_x soit un isomorphisme pour tout x. Pour montrer que α est un isomorphisme, il faut voir que pour tout ouvert U, $\alpha_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)$ est un isomorphisme. On se donne donc un ouvert U.
Supposons que $s \in \mathscr{F}(U)$ est tel que $\alpha_U(s) = 0$, ce qui implique que pour tout $x \in U$ on a

$$\alpha_x\big([U,s]\big) = 0 \in \mathscr{G}_x,$$

et l'injectivité de α_x entraîne que $[U,s] = 0$. Ainsi, pour tout $x \in U$, il existe un ouvert V_x (on peut supposer que $V_x \subset U$) tel que $s\big|_{V_x} = 0$[2]. Les V_x formant un

2. On rappelle que dans le cas d'une limite inductive $\varinjlim_{i \in I} G_i$, le fait qu'un élément $g \in G_j$ soit tel que $[g] = 0$ revient à demander l'existence d'un k tel que $\varphi_{jk}(g) = 0$

recouvrement ouvert de U, on obtient $s=0$, comme désiré. Ainsi, α_U est injectif. Soit maintenant $t \in \mathscr{G}(U)$. Par hypothèse, il existe pour tout $x \in U$ un élément $\bar{s}_x \in \mathscr{F}_x$ tel que $\alpha_x(\bar{s}_x) = [U,t]$. Cela entraîne l'existence d'une collection d'ouvert $W_x \subset V_x \subset U$ tels que $\alpha_{V_x}(s_x)\big|_{W_x} = t\big|_{W_x}$. En fait, quitte à remplacer s_x par $\rho_{V_xW_x}(s_x)$, on peut supposer que $s_x \in W_x$. On remarque que pour tous $x, y \in U$, on a

$$\alpha_{W_x}(s_x)\big|_{W_x\cap W_y} = t\big|_{W_x\cap W_y} = \alpha_{W_y}(s_y)\big|_{W_x\cap W_y}.$$

Cette égalité, la naturalité de α et l'injectivité des α_V démontrée ci-dessus entraîne que la propriété *(ii)* de $\mathscr{F}$ est vérifiée. On obtient donc l'existence d'un $s \in \mathscr{F}(U)$ tel que $s\big|_{W_x} = s_x$. On doit encore vérifier que s est bien envoyé sur t par α_U. Puisque l'on a $\alpha_U(s)\big|_{W_x} = t\big|_{W_x}$ pour tout x, on trouve $\alpha_U(s) = t$, comme désiré. □

L'usage des germes peut paraître un peu étrange et moins intuitif, au départ. Cependant, on verra qu'ils possèdent des bonnes propriétés. De plus, pour un morphisme $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$, les α_x déterminent α de manière complète, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.1.19
Soient $\mathscr{F} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathscr{G}$ *deux morphismes de faisceaux tels que* $\alpha_x = \beta_x$ *pour tout* $x \in X$. *Alors* $\alpha = \beta$.

Démonstration. Soit U un ouvert de X et $s \in \mathscr{F}(U)$. Pour tout $x \in U$, on a

$$\big[\alpha_U(s)\big] = \alpha_x([U,s]) = \beta_x([U,s]) = \big[\beta_U(s)\big].$$

Ainsi, pour tout $x \in U$, on a l'existence d'un ouvert W_x contenu dans U tel que $\alpha_U(s)\big|_{W_x} = \beta_U(s)\big|_{W_x}$. Puisque les W_x forment un recouvrement ouvert de U, la condition de localité implique $\alpha_U(s) = \beta_U(s)$. □

Définition 2.1.20
Soit $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *un morphisme de pré-faisceaux. On définit le pré-faisceau* noyau*, le pré-faisceau* image *et le pré-faisceau* co-noyau *comme étant le pré-faisceau définit par* $U \mapsto \ker \alpha_U$, $U \mapsto \operatorname{im} \alpha_U$ *et* $U \mapsto \operatorname{coker} \alpha_U$ *respectivement.*

Remarques 2.1.21 (i) Il s'agit en effet de pré-faisceaux. Par exemple, si $U \subset V$, l'application induite pour les ker est la restriction de ρ_{VU} à $\ker \alpha_V$. Les autres cas se traitent de manière analogue.

(ii) Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des faisceaux, alors $\ker \alpha$ est un faisceau. Pour voir cela, on considère un ouvert U de X et un recouvrement ouvert $\{U_i\}$, $i \in I$, de U. Si $s \in (\ker \alpha)(U) = \ker \alpha_U$ est tel que $s\big|_{U_i} = 0$, pour tout $i \in I$, alors $s = 0$, puisque $\mathscr{F}$ est un faisceau.
On considère maintenant une collection d'éléments $s_i \in (\ker \alpha)(U_i)$ telle que $s_i\big|_{U_i\cap U_j} = s_j\big|_{U_i\cap U_j}$ pour tous $i, j \in I$. Le fait que $\mathscr{F}$ soit un faisceau entraîne l'existence de $s \in \mathscr{F}(U)$ tel que $s\big|_{U_i} = s_i$. Pour voir que $s \in (\ker \alpha)(U)$, on calcule :

$$\alpha_U(s)\big|_{U_i} = \alpha_{U_i}\big(s\big|_{U_i}\big) = \alpha_{U_i}(s_i) = 0, \quad \forall i \in I.$$

Puisque $\mathscr{G}$ est un faisceau, on a $\alpha_U(s) = 0$, comme désiré. Ainsi, $\ker \alpha$ est bien un faisceau.

Le passage d'un pré-faisceau à un faisceau se fait en rajoutant des conditions pour qu'un comportement local se répercute de manière globale et la proposition suivante rend compte de ce fait. D'une manière générale, les faisceaux mettent en évidence le principe bien connu « think globally, act locally ».

Définition 2.1.22 (Faisceau associé à un pré-faisceau)
Soit $\mathscr{F}$ un pré-faisceau. On dit qu'un couple $(\mathscr{F}^+, \theta)$, où $\mathscr{F}^+$ est un faisceau et $\theta : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}^+$ est un morphisme, est le faisceau associé au pré-faisceau *$\mathscr{F}$ s'il satisfait la propriété universelle suivante : pour tout faisceau $\mathscr{G}$ et tout morphisme $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$, il existe un unique morphisme $\beta : \mathscr{F}^+ \longrightarrow \mathscr{G}$ tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathscr{G} \\
\mathscr{F}^+ \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.1.23
Si un tel faisceau existe, il est unique à isomorphisme près.

Démonstration. Supposons que $(\mathscr{F}^+, \theta)$ et $(\tilde{\mathscr{F}}^1, \tilde{\theta})$ sont deux couples satisfaisant la propriété universelle. En prenant $\mathscr{G} = \mathscr{F}^+$ et $\alpha = \theta$ on remarque qu'avec $\beta = \mathrm{id}$, le diagramme commute (et ce morphisme est le seul faisant commuter le diagramme, dans ces conditions). En appliquant successivement la propriété universelle à $\mathscr{F}^+$ avec $\mathscr{G} = \tilde{\mathscr{F}}^+$ et à $\mathscr{F}^+$ avec $\mathscr{G} = \mathscr{F}^+$ on obtient l'existence de deux morphisme $\beta : \mathscr{F}^+ \longrightarrow \tilde{\mathscr{F}}^+$ et $\tilde{\beta} : \tilde{\mathscr{F}}^+ \longrightarrow \mathscr{F}^+$ tels que $\theta = \tilde{\beta}\,\tilde{\theta}$ et $\tilde{\theta} = \beta\,\theta$, ce qui est résumé dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "\tilde{\theta}"] \arrow[d, "\theta"'] & \tilde{\mathscr{F}}^+ \arrow[dl, bend left, "\tilde{\beta}"] \\
\mathscr{F}^+ \arrow[ur, bend left, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

On a donc $\theta = \tilde{\beta}\,\beta\,\theta$, ce qui implique que $\tilde{\beta}\,\beta = \mathrm{id}_{\mathscr{F}^+}$. Un raisonnement analogue entraîne que $\beta\,\tilde{\beta} = \mathrm{id}_{\tilde{\mathscr{F}}^+}$. Ainsi, $\mathscr{F}^+ \cong \tilde{\mathscr{F}}^+$. □

Proposition 2.1.24
Si $\mathscr{F}$ est un faisceau, il satisfait la propriété universelle ci-dessus, ce qui implique que $\mathscr{F} \cong \mathscr{F}^+$.

Démonstration. Si $\mathscr{G}$ est un faisceau et $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morphismse de pré-faisceaux, on constate que $\mathscr{F}$ satisfait la propriété universelle en prenant $\beta = \alpha$. Ainsi, par la proposition précédente, $\mathscr{F} \cong \mathscr{F}^+$. □

Convention 2.1.25
Si $x \in U \subset X$ et $g \in \mathscr{F}(U)$, on notera à partir de maintenant g_x pour la classe de g dans $\varinjlim_{x \in V} \mathscr{F}(V)$.

Proposition 2.1.26 (Existence du faisceau associé à un pré-faisceau)
Soit $\mathscr{F}$ un pré-faisceau. Alors son faisceau associé $\mathscr{F}^+$ existe[3].

Démonstration. Tout au long de cette preuve, U désigne un ouvert quelconque de X.

Définition de $\mathscr{F}^+$ On va considérer les applications $f : U \longrightarrow \bigcup_{x\in U} \mathscr{F}_x$ qui satisfont les deux propriétés suivantes :

($\star$) Pour tout $x \in U$, $f(x) \in \mathscr{F}_x$.

($\star\star$) Pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert V_x de x inclus dans U et un élément $t \in \mathscr{F}(V_x)$ tel que pour tout $y \in V_x$ le germe t_y de t en y est égal à $f(y)$.

On pose alors

$$\mathscr{F}^+(U) = \Big\{ f : U \longrightarrow \bigcup_{x\in U} \mathscr{F}_x \mid f \text{ satisfait } (\star) \text{ et } (\star\star) \Big\}.$$

Structure de groupe La condition ($\star$) nous permet de définir la somme de deux fonctions terme à terme (puisque chaque $\mathscr{F}_x$ est un groupe).

Fonctorialité Si V et W sont deux ouverts avec $V \subset W$, on obtient une application

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^+(W) &\longrightarrow \mathscr{F}^+(V) \\ f &\longmapsto f\big|_V, \end{aligned}$$

et le fait que les conditions ($\star$) et ($\star\star$) soient locales implique que $f\big|_V$ appartient bien à $\mathscr{F}^+(V)$. Les deux autres propriétés sont évidentes, avec le choix de la restriction comme application de restriction.

Pré-faisceau L'application $\emptyset$ vérifie les propriétés demandées, ce qui implique que $\mathscr{F}^+(\emptyset) = 0$.

Condition (i) Supposons que $\{U_i\}_{i\in I}$ soit un recouvrement ouvert de U et que $f \in \mathscr{F}^+(U)$ est telle que $f\big|_{U_i} = 0$ pour tout i, alors on a $f = 0$ sur U.

Condition (ii) A nouveau, on considère $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de U et $f_i \in \mathscr{F}^+(U_i)$ une collection d'applications telle que que $f_i\big|_{U_i\cap U_j} = f_j\big|_{U_i\cap U_j}$ pour tout couple $(i,j) \in I \times I$. On définit une application $f : U \longrightarrow \bigcup_{x\in U} \mathscr{F}_x$ de la manière suivante : pour $x \in U$, on choisit l'un des $i \in I$ tel que $x \in U_i$ et on pose $f(x) = f_i(x)$. Par hypothèse cette définition ne dépend pas du choix de i. La condition ($\star$) est vérifiée puisqu'elle l'est sur chaque ouvert. Soit $x \in U$ et $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Par hypothèse, on a l'existence d'un ouvert V_x contenu dans U_i et $t \in \mathscr{F}(V_x)$ tel que pour tout $y \in V_x$ on ait $\bar{t}_y = f_i(y)$. Puisque f_i coïncide avec f sur V_x, on obtient ($\star\star$).

Morphisme On construit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \theta_U : \mathscr{F}(U) &\longrightarrow \mathscr{F}^+(U) \\ g &\longmapsto \theta_U(g) : U \longrightarrow \textstyle\bigcup_{y\in U} \mathscr{F}_y \\ &\qquad\qquad\quad x \longmapsto g_x \end{aligned}$$

On constate qu'il s'agit d'un homomorphisme de groupes et que les conditions ($\star$) et ($\star\star$) sont vérifiées pour $\theta_U(g)$, quel que soit g. Pour montrer la naturalité

3. En anglais, où l'on appelle un faisceau *sheaf*, le procédé associant à un pré-faisceau son faisceau est appelé *sheafification*. Malheureusement, on ne dipose pas en français d'un aussi joli mot.

de θ, on considère deux ouverts U et V de X tels que $V \subset U$ et $g \in \mathscr{F}(U)$. Pour tout $x \in V$, on a

$$\theta_U(g)\big|_V(x) = g_x = \big(g|_V\big)_x = \theta_V\big(g\big|_V\big)(x),$$

ce qui implique que les applications $\theta_U(g)\big|_V$ et $\theta_V\big(g\big|_V\big)$ entraînent la naturalité de θ.

Propriété universelle Soit $\mathscr{G}$ un faisceau, $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morphisme et f une application de $\mathscr{F}^+(U)$. Pour tout $x \in U$, on a l'existence d'un ouvert V_x avec $x \in V_x \subset U$ et d'un élément $t^x \in \mathscr{F}(V_x)$ tel que pour tout $z \in V_x$ on ait $f(z) = t^x_z$. Si y est un autre élément de U, les germes de t^x et t^y sont égaux pour tout $z \in V_x \cap V_y$, ce qui implique que $t^x\big|_{V_x \cap V_y} = t^y\big|_{V_x \cap V_y}$. Cette dernière propriété sera aussi vérifiée pour les images de t^x et t^y par α_{V_x} et α_{V_y}, respectivement. Il existe donc un élément $t \in \mathscr{G}(U)$ tel que $t\big|_{V_x} = \alpha_{V_x}(t^x)$ pour tout x, ce qui nous amène à poser : $\beta_U(f) = t$. Si f est 0, la condition (i) nous assure que f sera envoyée sur 0. Maintenant, considérons deux applications $f, g \in \mathscr{F}(U)$ et des éléments $t, s, r \in \mathscr{F}(U)$ tels que

$$\beta_U(f) = \alpha(t), \quad \beta_U(g) = \alpha(s), \quad \beta_U(f+g) = \alpha(r).$$

Pour tout $x \in U$ et tout $z \in V_x$ (en fait ce V_x est l'intersection des 3 donnés précédémment), on a que

$$r^x_z = t^x_z + s^x_z.$$

Quitte à restreindre (encore) les V_x on peut supposer que cela implique l'égalité $r^x = t^x + s^x$ et la condition (i) entraîne que $r = t + s$. Ainsi, β_U est bien un homorphisme de groupes.
Soient $V \subset U$ deux ouverts ainsi que $t \in \mathscr{F}(U)$ et $s \in \mathscr{F}(V)$ tels que $\beta_U(f) = \alpha_U(t)$ et $\beta_V\big(f\big|_V\big) = \alpha_V(s)$. On aimerait voir que $t\big|_V = s$, ce qui entraînera que $\beta_U(f)\big|_V = \beta_V\big(f\big|_V\big)$ et donc que β est bien un morphisme. Pour tout $x \in V$, on peut trouver $x \in V_x \subset V$, suffisament petit, pour qu'on ait $t\big|_{V_x} = t^x$ et $s\big|_{V_x} = s^x$. Pour tout $z \in V_x$, on a $t^x_z = f(z) = s^x_z$ et, quitte à restreindre V_x, on a $(t|_V)^x = s^x$. Ainsi, la condition (i) implique que $t\big|_V = s$, comme désiré. Si $\beta' : \mathscr{F}^+ \longrightarrow \mathscr{G}$ est un autre morphisme tel que $\beta'\,\theta = \alpha$, on a pour tout ouvert U et tout $f \in \mathscr{F}^+(U)$:

$$\beta_U(f) = \alpha_U(t) = \beta'_U\,\theta_U(t) = \beta'_U(f_t),$$

où $f_t : U \longrightarrow \bigcup_{x \in U} \mathscr{F}_x$ est l'application qui envoie x sur t_x. Pour un $x \in U$ et son V_x associé, on a

$$f(z) = t^x_z = \big(t\big|_{V_x}\big)_z, \quad \forall z \in V_x,$$

c'est-à-dire que $f_t(z) = f(z)$ pour tout $z \in V_x$. Ainsi, $f_t = f$ sur U et donc $\beta_U = \beta'_U$.

□

Remarque 2.1.27
Yoshifumi Tsuchimoto propose sur sa page internet [Tsu07] une autre manière, peut-être plus naturelle, de construire le faisceau associé à un pré-faisceau. Partant d'un pré-faisceau $\mathscr{F}$, on construit un pré-faisceau $\mathscr{F}^1$, qui satisfait la condition de localité.

Puis, partant de $\mathscr{F}^1$, on définit un faisceau $\mathscr{F}^2$. La construction de $\mathscr{F}^1$ se fait en définissant sur $\mathscr{F}(U)$ la relation d'équivalence suivante : deux éléments $s, t \in \mathscr{F}(U)$ sont équivalents s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$, $i \in I$ tel que $s\big|_{U_i} = t\big|_{U_i}$, pour tout i. On pose $\mathscr{F}^1(U) = \mathscr{F}(U)/_\sim$ et par définition l'addition de deux classes se fait via l'addition de deux représentants. On vérifie facilement que l'on octient une opération bien définie.
Pour tout recouvrement ouvert $\{U_i\}$, $i \in I$, de U, on définit :

$$\mathscr{F}^2\big(U, \{U_i\}\big) = \Big\{s \in \prod_{i \in I} \mathscr{F}^1(U_i) : s_i\big|_{U_i \cap U_j} = s_j\big|_{U_i \cap U_j}\Big\}.$$

Ainsi, les éléments qui satisfont la condition de recollement sont ceux qui proviennent effectivement d'un élément définit sur un ouvert plus grand. On pose finalement

$$\mathscr{F}^2(U) = \varinjlim_{\{U_i\}} \mathscr{F}^2\big(U, \{U_i\}\big),$$

où l'ordre sur l'ensemble des recouvrements est l'inclusion. Il reste à vérifier que $\mathscr{F}^2$ satisfait toutes les propriétés demandées.

Exemple 2.1.28
Pour un espace topologique X, on considère pour chaque ouvert U de X :

(i) $\mathscr{F}'(U)$ comme étant l'ensemble des fonctions localement continues de U dans $\mathbb{R}$;

(ii) $\mathscr{F}''(U)$ le sous groupe de $\mathscr{F}'(U)$ constitué des fonction constantes.

On définit alors le pré-faisceau $\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}'(U)/_{\mathscr{F}''(U)}$. Si $f \in \mathscr{F}(U)$ est une fonction localement constante, il existe un recouvrement ouvert U_i, $i \in I$ de U tel que $f\big|_{U_i}$ soit constante pour chaque i. Cependant, si X n'est pas connexe, $\mathscr{F}(U)$ peut ne pas être zéro, ce qui implique que $\mathscr{F}$ n'est pas forcément un faisceau. Si X n'est pas connexe, on aura $\mathscr{F}^1(U) = \{0\}$ dans le procédé décrit dans la remarque ci-dessus.

Proposition 2.1.29
Soit $x \in X$. Alors $\mathscr{F}_x \cong \big(\mathscr{F}^+\big)_x$.

Idée. On considère le morphisme $\theta : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}^+$, comme dans la preuve de la proposition 2.1.26. Ce morphisme induit un homomorphisme $\Phi : \mathscr{F}_x \longrightarrow \big(\mathscr{F}^+\big)_x$, qui envoie $s \in \mathscr{F}(U)$ sur f_s :

$$\begin{aligned} f_s : V &\longrightarrow \bigcup_{y \in V} \mathscr{F}_y \\ y &\longmapsto s_y. \end{aligned}$$

□

Définition 2.1.30 (Sous-faisceau)
Un sous-faisceau *d'un faisceau $\mathscr{F}$ est un faisceau $\mathscr{F}'$ tel que pour tout ouvert U, $\mathscr{F}'(U)$ soit un sous-groupe de $\mathscr{F}(U)$ et que les applications de restriction soient celles induites par les applications de restriction de $\mathscr{F}$.*

Remarques 2.1.31 (i) Cette définition implique que pour tout $x \in X$, $\mathscr{F}'_x$ est un sous-groupe de $\mathscr{F}_x$.

(ii) Si $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ est un morphisme de faisceaux, alors le pré-faisceau noyau de α, tel que défini ci-dessus, est un sous-faisceau de $\mathscr{F}$.

Définition 2.1.32 (Noyau d'un morphisme)
Le noyau *d'un morphisme de faisceaux $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ est le pré-faisceau noyau de $\mathscr{F}$. Il est noté* $\ker \alpha$ *(il s'agit en fait d'un faisceau, comme montré au point (ii) de la remarque 2.1.21).*

Définition 2.1.33 (Morphisme injectif)
Un morphisme de faisceaux $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ est dit injectif *si* $\ker \alpha = 0$.

Par définition du noyau d'un faisceau, α est injectif si et seulement si chaque $\alpha_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)$ l'est. Par contre, cette équivalence ne sera pas vraie pour la surjectivité.

Définition 2.1.34 (Image d'un morphisme)
*L'*image *d'un morphisme de faisceaux $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ est le faisceau associé au pré-faisceau image de α. Elle est notée* $\operatorname{im} \alpha$.

Remarque 2.1.35
Dans la définition de l'image, il est nécessaire de considérer le faisceau associé car le pré-faisceau image peut mettre en défaut la condition de recollement. Pour cela, on choisit $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et, pour tout ouvert U de X, on définit $\mathscr{F}(U)$, respectivement $\mathscr{G}(U)$, comme étant l'ensemble des fonctions holomorphes sur U, respectivement l'ensemble des fonctions holomorphes sur U qui ne s'annulent pas. On constate que la fonction exponentielle induit un morphisme de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$ via composition.
Pour tout ouvert simplement connexe de X, on considère la fonction holomorphe log définie via l'intégration de $\frac{1}{z}$ d'un point z_0 fixé à x (voir III.6 de [Lan99]). Si on pose

$$U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}, \quad V = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$$

on a $X = U \cup V$. Ainsi, l'application identité appartient à $\mathscr{F}(U)$ et à $\mathscr{F}(V)$ et si le point z_0 appartient à $U \cap V$, les hypothèses de la condition de recollement sont satisfaites alors que l'application identité n'est pas dans $\mathscr{G}(X)$, puisque le logarithme complexe n'existe pas sur X.

Proposition 2.1.36
Soit $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morphisme injectif de pré-faisceaux. Alors le morphisme induit α^+ est injectif.

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, "\theta"] & \mathscr{G} \arrow[r, "\varphi"] & \mathscr{G}^+ \\
\mathscr{F}^+ \arrow[urr, dashed, "\alpha^+"'] & &
\end{tikzcd}$$

Afin de montrer que α^+ est injectif, on considère une application $f \in \mathscr{F}^+(U)$ telle que $\alpha^+(f) = 0$. On procède maintenant de la même manière que dans la preuve de la proposition 2.1.26 : pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert V_x de x contenu dans U et un élément $t^x \in \mathscr{F}(V_x)$ tel que $f(y) = (t^x)_y$, pour tout $y \in V_x$. La condition de recollement sur $\mathscr{F}$ nous fournit un $t \in \mathscr{F}(U)$ tel que $t\big|_{V_x} = t^x$ pour tout x et par hypothèse on a $\varphi_U \alpha_U(t) = 0$. Cela entraîne que $\alpha_U(t)_z = 0$ pour tout $z \in U$. Ainsi, pour tout z, on obtient un ouvert W_z contenant z (on peut le supposer inclus dans U) tel que $\alpha_U(t)\big|_{W_z} = 0$. La condition (i) sur $\mathscr{G}$ implique que $\alpha_U(t) = 0$ et donc $t = 0$. Ainsi, $f = 0$, comme désiré. $\square$

Corollaire 2.1.37
Si $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux, alors l'image de α peut-être identifiée à un sous-faisceau de $\mathscr{G}$.

Démonstration. On considère le morphisme d'inclusion du pré-faisceau image dans $\mathscr{G}$. La proposition précédente et la propriété universelle impliquent qu'il existe un morphisme de faisceaux injectif de $\operatorname{im}\alpha$ dans $\mathscr{G}^+ \cong \mathscr{G}$, comme désiré. □

Définition 2.1.38 (Morphisme surjectif)
Un morphisme de faisceaux $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ est dit surjectif *si $\operatorname{im}\alpha = \mathscr{G}$.*

Définition 2.1.39 (Faisceau quotient)
Soit $\mathscr{F}$ un faisceau et $\mathscr{F}'$ un sous-faisceau de $\mathscr{F}$. On définit le faisceau quotient *$\mathscr{F}/_{\mathscr{F}'}$ comme étant le faisceau associé au pré-faisceau $U \longmapsto \mathscr{F}(U)/_{\mathscr{F}'(U)}$.*

Proposition 2.1.40
On a un isomorphisme canonique entre $\mathscr{F}_x/_{\mathscr{F}'_x}$ et $(\mathscr{F}/_{\mathscr{F}'})_x$.

Démonstration. Soit $x \in X$. On considère l'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{F}_x &\longrightarrow \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U)/_{\mathscr{F}'(U)} \\ [U,g] &\longmapsto \big[U, g + \mathscr{F}'(U)\big]. \end{aligned}$$

La surjectivité et le fait que $\mathscr{F}'_x \subset \ker\varphi$ sont clairs. Pour l'autre inclusion, supposons que $\varphi\big([U,g]\big) = 0$, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert V contenant U tel que $g\big|_V$ appartient à $\mathscr{F}'(V)$. On a donc $(U,g) \sim (V, g|_V)$, ce qui implique $[U,g] \in \mathscr{F}'_x$, comme désiré. Ainsi, on a $\mathscr{F}_x/_{\mathscr{F}'_x} \cong \varinjlim_{x\in U} \mathscr{F}(U)/_{\mathscr{F}'(U)}$. On conclut en utilisant la proposition 2.1.29. □

Définition 2.1.41 (Conoyau)
Le conoyau *d'un morphisme de faisceaux $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ est le faisceau associé au pré-faisceau conoyau.*

Proposition 2.1.42
Soit $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux et $x \in X$. Alors :

(*i*) $(\ker\alpha)_x = \ker\alpha_x$.

(*ii*) $(\operatorname{im}\alpha)_x = \operatorname{im}\alpha_x$.

Démonstration. (i) Soit $t_x \in (\ker\alpha)_x$. Alors, il existe un ouvert V et $t \in \mathscr{F}(V)$ tel que $t_x = [V,t]$ et $\alpha_V(t) = 0$, ce qui implique que $\alpha_x(t_x) = \overline{\alpha_V(t)} = \overline{0}$. Réciproquement, si $t_x = [V,t] \in \ker\alpha_x$, alors il existe un ouvert W tel que $\overline{\alpha_V(t)}\big|_W = 0$, ce qui implique que $t_x \in (\ker\alpha)_x$, par naturalité de α.

(ii) Se montre de manière semblable à (*i*), en utilisant la proposition 2.1.29.

□

Corollaire 2.1.43
Soit $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux. Alors :

(*i*) *α est injectif si et seulement si α_x est injectif pour tout x.*

(*ii*) *α est surjectif si et seulement si α_x est surjectif pour tout x.*

(*iii*) *Une suite de faisceaux $\ldots \longrightarrow \mathscr{F}^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} \mathscr{F}^i \xrightarrow{\alpha^i} \mathscr{F}^{i+1} \longrightarrow \ldots$ est exacte en $\mathscr{F}^i$ si et seulement la suite correspondante est exacte en $\mathscr{F}^i_x$ pour tout $x \in X$.*

Remarque 2.1.44
En fait, un conflit de terminologies et le corollaire ci-dessus peuvent induire en erreur. Dans la preuve de la proposition 2.1.18, on a vu que pour montrer que la surjectivité de α_x implique celle des α_U, on utilise l'injectivité des α_U. Ici, il faut bien voir la condition de surjectivité de α comme le fait que $\operatorname{im}\alpha = \mathscr{G}$, où $\operatorname{im}\alpha$ est le faisceau associé au pré-faisceau $U \longmapsto \operatorname{im}\alpha_U$.

Proposition 2.1.45 (Premier théorème d'isomorphisme)
Soit $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux. Alors $\operatorname{im}\alpha \cong \mathscr{F}/_{\ker\alpha}$.

Démonstration. On utilise la proposition 2.1.18, la remarque précédente ainsi que la proposition précédente et son corollaire. On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{im}\alpha \cong \mathscr{F}/_{\ker\alpha} &\Leftrightarrow (\operatorname{im}\alpha)_x \cong (\mathscr{F}/_{\ker\alpha})_x, \quad \forall x \in X\\ &\Leftrightarrow \operatorname{im}\alpha_x \cong \left(\mathscr{F}_x/_{(\ker\alpha)_x}\right), \quad \forall x \in X\\ &\Leftrightarrow \operatorname{im}\alpha_x \cong \left(\mathscr{F}_x/_{\ker\alpha_x}\right), \quad \forall x \in X,\end{aligned}$$

qui provient du cas des homomorphismes de groupes. □

Proposition 2.1.46 (*i*) *Soit $\mathscr{F}'$ un sous-faisceau d'un faisceau $\mathscr{F}$. Alors la suite suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}/_{\mathscr{F}'} \longrightarrow 0$$

(*ii*) *Réciproquement, si la suite de faisceaux $0\longrightarrow\mathscr{F}'\longrightarrow\mathscr{F}\longrightarrow\mathscr{F}''\longrightarrow 0$ est exacte, alors $\mathscr{F}'$ est isomorphe à un sous-faisceau $\mathscr{F}'_s$ de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}''$ est isomorphe au quotient de $\mathscr{F}$ par ce sous-faisceau.*

Démonstration. (i) Cette suite est exacte si et seulement si la suite suivante est exacte pour tout $x \in X$:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}'_x \longrightarrow \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{F}_x/_{\mathscr{F}'_x} \longrightarrow 0.$$

Or, le fait que $\mathscr{F}' \leq \mathscr{F}$ implique que $\mathscr{F}'_x$ est un sous-groupe de $\mathscr{F}_x$ pour tout x, ce qui entraîne l'exactitude de la suite.

(ii) On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\beta} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0.$$

Le fait que α soit injectif entraîne que chaque α_U est injectif et, pusique l'image d'un morphisme peut être identifiée à un sous-faisceau du codomaine, on obtient que $\mathscr{F}'$ est isomorphe à un sous-faisceau $\mathscr{F}'_s$ de $\mathscr{F}$. On obtient ensuite :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}/_{\ker\beta} \cong \mathscr{F}'' &\Rightarrow \mathscr{F}/_{\operatorname{im}\alpha} \cong \mathscr{F}''\\ &\Rightarrow \mathscr{F}/_{\mathscr{F}'_s} \cong \mathscr{F}''.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.47 (Faisceau produit)
Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux faisceaux. On considère le pré-faisceau produit $\mathscr{P}$, qui associe à chaque ouvert U le produit $\mathscr{F}_1(U) \times \mathscr{F}_2(U)$. Alors, il s'agit d'un faisceau.

Démonstration. Le résultat provient du fait que pour tout couple d'ouverts $V \subset U$ et tout couple $(s,t) \in \mathscr{F}_1(U) \times \mathscr{F}_2(U)$, on a

$$(s,t)\big|_V = \big(s|_V, t|_V\big).$$

□

Proposition 2.1.48
Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux faisceaux. Le faisceau produit définit ci-dessus est le produit des faisceaux $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ au sens catégorique.

Démonstration. On se donne deux collections d'applications :

$$p^i : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{F}_i, \quad i = 1,2,$$
$$p^i_U : \mathscr{P}(U) \longrightarrow \mathscr{F}_i(U), (s_1, s_2) \longmapsto s_i,$$

et l'on constate qu'il s'agit de morphismes de faisceaux. Supposons maintenant que $\mathscr{H}$ soit un faisceau et que $q^i : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{F}_i$ soient des morphismes pour $i = 1,2$. On définit alors le morphisme

$$\alpha : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{P}$$
$$\alpha_U : \mathscr{H}(U) \longrightarrow \mathscr{P}(U), s \longmapsto \big(q^1(s), q^2(s)\big),$$

et l'on vérifie qu'il est tel que $p^i\alpha = q^i$, pour $i = 1,2$ et qu'il est le seul ayant cette propriété. □

Définition 2.1.49 (Produit de faisceaux)
Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux faisceaux, leur produit est noté $\mathscr{F} \times \mathscr{G}$.

On remarque que, jusqu'à maintenant, on s'est contenté de parler de faisceaux sur un seul espace topologique. Si l'on se donne deux espaces topologiques X et Y ainsi qu'une application continue $f : X \longrightarrow Y$, on aimerait pouvoir définir via cette fonction un foncteur de $\mathfrak{Ab}(X)$ vers $\mathfrak{Ab}(Y)$ et inversément.

Définition 2.1.50 (Image directe)
*Soient X, Y et f comme ci-dessus et $\mathscr{F}$ un faisceau sur X. L'*image directe *de $\mathscr{F}$ par f est le faisceau $f_*\mathscr{F}$ qui associe à chaque ouvert V de Y le groupe $\mathscr{F}\big(f^{-1}(V)\big)$.*

Définition 2.1.51 (Image inverse)
*Soient X, Y et f comme ci-dessus et $\mathscr{G}$ un faisceau sur Y. L'*image inverse *de $\mathscr{G}$ par f est le faisceau $f^{-1}\mathscr{G}$ associé au pré-faisceau $U \longmapsto \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathscr{G}(V)$, où V parcourt l'ensemble des ouverts contenant $f(U)$.*

On vérifie que dans ces deux définitions on obtient bien des faisceaux sur Y, respectivement X.

Si $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'$ est un morphisme de faisceaux sur X et si V est un ouvert de Y, on peut définir

$$(f_*\alpha)_V = \alpha_{f^{-1}(V)} : \mathscr{F}\big(f^{-1}(V)\big) \longrightarrow \mathscr{F}'\big(f^{-1}(V)\big).$$

Dans l'autre cas, si $\beta : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{G}'$ est un morphisme de faisceaux sur Y et si U est un ouvert de X, le morphisme

$$f^{-1}(\beta)_U : \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathscr{G}(V) \longrightarrow \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathscr{G}'(V)$$

est induit par la propriété universelle des limites directes. Si l'on note $\varinjlim \mathscr{G}$ et $\varinjlim \mathscr{G}'$ les deux pré-faisceaux liés à ces limites, on a

$$\begin{tikzcd} \varinjlim \mathscr{G} \arrow[r, "f^{-1}(\beta)"] \arrow[d] & \varinjlim \mathscr{G}' \arrow[r] & f^{-1}\mathscr{G}' \\ f^{-1}G \arrow[urr, dashed] & & \end{tikzcd}$$

par la propriété universelle du faisceau associé. On vérifie que l'image directe est un foncteur de $\mathfrak{Ab}(X)$ vers $\mathfrak{Ab}(Y)$ tandis que l'image inverse est un foncteur de $\mathfrak{Ab}(Y)$ vers $\mathfrak{Ab}(X)$.

Définition 2.1.52 (Restriction d'un faisceau)
Soit Z un sous-ensemble d'un espace topologique X et $i : Z \hookrightarrow X$ l'inclusion. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau sur X, on appelle $i^{-1}\mathscr{F}$ la restriction *de $\mathscr{F}$ à Z, ce que l'on note $\mathscr{F}\big|_Z$.*

Proposition 2.1.53
Pour tout $z \in Z$, on peut identifier $\big(\mathscr{F}|_Z\big)_z$ avec $\mathscr{F}_z$.

Idée. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \psi : \varinjlim_{z\in U\subset Z} \varinjlim_{U\subset V} \mathscr{F}(V) &\longrightarrow \varinjlim_{z\in V} \mathscr{F}(V) \\ \big[U,[V,s]\big] &\longmapsto [V,s], \end{aligned}$$

et l'on utilise la proposition 2.1.29. □

Remarque 2.1.54
En fait, si $f : X \longrightarrow Y$ et $\mathscr{G} \in \mathfrak{Ab}(Y)$ on peut identifier $\big(f^{-1}\mathscr{G}\big)_x$ et $\mathscr{G}_{f(x)}$. En particulier, le foncteur f^{-1} est exact, par le corollaire 2.1.43.

Proposition 2.1.55
Les foncteurs f^{-1} et f_* sont adjoints.

Démonstration. On considère donc une application continue $f : X \longrightarrow Y$ ainsi que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux faisceaux quelconques sur X et Y respectivement. Comme ci-dessus, on notera, de manière abusive, $\varinjlim \mathscr{G}$ pour le pré-faisceau sur X qui envoie U sur $\varinjlim_{f(U)\subset V} \mathscr{G}(V)$, de sorte que $\big(\varinjlim \mathscr{G}\big)^+ = f^{-1}\mathscr{G}$.
Pour commencer, on montre qu'il existe un morphisme $\varepsilon : f^{-1}f_*\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}$. Le fait que $\mathscr{F}$ soit un foncteur et la propriété universelle de la limite directe impliquent que pour tout ouvert U de X les applications de restriction s'étendent en un morphisme $\varepsilon'_U : \varinjlim f_*\mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{F}(U)$ et ces applications forment les composantes d'un morphisme de pré-faisceaux ε'. La propriété universelle du foncteur associé nous fournit le morphisme $\varepsilon : f^{-1}f_*\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}$.
De même, on aimerait exhiber un morphisme $\eta : \mathscr{G} \longrightarrow f_*f^{-1}\mathscr{G}$. Pour un ouvert V de Y, le groupe $\big(f_*f^{-1}\mathscr{G}\big)(V)$ est un petit peu compliqué à écrire. Cependant, le fait que les germes d'un pré-faisceau soient isomorphes à ceux de son faisceau associé et la remarque précédente nous permettent d'identifier $\big(f_*f^{-1}\mathscr{G}\big)(V)$ avec l'ensemble des applications $f : f^{-1}(V) \longrightarrow \bigcup_{x\in f^{-1}(V)} \mathscr{G}_{f(x)}$, qui satisfont les deux conditions données dans la construction du faisceau associé. Pour chaque $t \in \mathscr{G}(V)$, on définit l'application $g_t : x \longmapsto t_{f(x)}$ de manière à avoir un homomorphisme

$\eta_V : \mathscr{G}(V) \longrightarrow \big(f_* f^{-1}\mathscr{G}\big)(V)$; ces différentes composantes nous donnent un morphisme η, comme désiré.
Afin de voir que f_* et f^{-1} sont adjoints, on doit montrer que ε est universelle de f^{-1} à f, c'est-à-dire que pour tout β comme ci-dessous, il existe un unique γ tel que $f^{-1}\gamma$ rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} f_*\mathscr{F} \\ \\ \mathscr{G} \arrow[uu, dashed, "\gamma"] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} f^{-1}f_*\mathscr{F} \arrow[rr, "\varepsilon"] & & \mathscr{F} \\ \\ f^{-1}G \arrow[uu, dashed, "f^{-1}\gamma"] \arrow[uurr, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Pour un tel β, on pose $\gamma = f_*\beta \circ \eta$. On vérifie alors que $f^{-1}\gamma$ fait bien commuter le diagramme et que γ est le seul morphisme ayant cette propriété. $\square$

La proposition suivante met à nouveau en avant la nature locale des faisceaux.

Proposition 2.1.56 (Recollement de faisceaux)
Soit X un espace topologique et $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Soit de plus, pour tout $i \in I$, un faisceau $\mathscr{F}_i$ sur U_i et pour tout couple $(i,j) \in I \times I$ un isomorphisme $\varphi^{ij} : \mathscr{F}_i\big|_{U_i\cap U_j} \longrightarrow \mathscr{F}_j\big|_{U_i\cap U_j}$ tel que

(i) $\varphi^{ii} = \mathrm{id}_{U_i}$, pour tout i ;

(ii) pour tous $i,j,k \in I$, $\varphi^{ik} = \varphi^{jk}\varphi^{ij}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Alors, il existe un unique faisceau $\mathscr{F}$ sur X et des isomorphismes $\psi^i : \mathscr{F}\big|_{U_i} \longrightarrow \mathscr{F}_i$ tel que pour tous i,j on ait $\psi^j = \varphi^{ij}\,\psi^i$ sur $U_i \cap U_j$.

Démonstration. Pour un ouvert W de X, on pose $W_i = U_i \cap W$, pour tout i. On définit alors :

$$\mathscr{F}(W) = \Big\{ s \in \prod_{i\in I} \mathscr{F}_i(W_i) : \varphi^{ij}_{W_i\cap W_j}\big(s_i\big|_{W_i\cap W_j}\big) = s_j\big|_{W_i\cap W_j}, \forall i,j \in I \Big\},$$

où l'on a omis d'écrire les classes pour ne pas surcharger la notation. Si V est un ouvert inclus dans W, alors $V_i = U_i \cap V \subset W_i$, ce qui implique que l'on peut définir les applications de restriction composante par composante à partir de celles que l'on possède : si $s \in \mathscr{F}(W)$, on pose $\big(s\big|_V\big)_i = s_i\big|_{V_i}$, et l'on vérifie que c'est bien défini. Les propriétés fonctorielles de $\mathscr{F}$ proviennent de celles de $\mathscr{F}_i$, du fait que tous les morphismes sont des morphismes de groupes et des propriétés (i) et (ii) des φ^{ij}.
Supposons maintenant que $\{V^j\}$, $j \in J$ soit un recouvrement ouvert d'un ouvert V de X. On note $V_i = V \cap U_i$, $V_i^j = V^j \cap U_i$, pour tout $i \in I$ et $j \in J$, ce qui implique que pour tout i les V_i^j forment un recouvrement ouvert de $V \cap U_i = V_i$, lorsque j parcourt J.
Si $s \in \mathscr{F}(V)$ est tel que $s\big|_{V^j} = 0$, alors, en notant $V_i^j = V^j \cap U_i$, on a $s_i\big|_{V_i^j} = 0$ pour tout couple $(i,j) \in I \times J$ et les propriétés des $\mathscr{F}_i$ impliquent que $s = 0$. Pour la deuxième condition, on considère une collection d'éléments telle que $s_j \in \mathscr{F}(V^j)$, pour tout j, et telle que pour tous $j,k \in J$ on ait $s^j\big|_{V^j\cap V^k} = s^k\big|_{V^j\cap V^k}$. Cette égalité et la manière dont on a définit les applications de restriction impliquent que pour tout $i \in I$ et tous $j,k \in J$ on a $s_i^j\big|_{V_i^j\cap V_i^k} = s_i^k\big|_{V_i^j\cap V_i^k}$. Puisque chaque $\mathscr{F}_i$ est un faisceau, on obtient un ensemble de $s_i \in \mathscr{F}_i(V_i)$ tel que $s_i\big|_{V_i^j} = s_i^j$ pour tous i,j. Le fait que

les φ^{ij} soient définis sur des classes implique les égalités $\varphi^{ij}_{V_i \cap V_j}\big(s_i\big|_{V_i\cap V_j}\big) = s_j\big|_{V_i\cap V_j}$. Ainsi, $\mathscr{F}$ est un faisceau.
On aimerait donner des isomorphismes $\psi^i : \mathscr{F}\big|_{U_i} \longrightarrow \mathscr{F}_i$. Pour cela, on fixe $i \in I$ ainsi que $V \subset U_i$. Pour chaque ouvert W contenant V, on dispose d'une application de $\mathscr{F}(W)$ dans $\mathscr{F}_i(V)$ (il s'agit de la restriction de la projection d'un élément sur sa i-ème composante) qui est compatible avec les applications de restriction. La propriété universelle de la limite directe nous donne donc un morphisme

$$\psi^i_V : \varinjlim_{V\subset W} \mathscr{F}(W) \longrightarrow \mathscr{F}_i(V),$$

et l'on vérifie que ces morphismes forment bien une transformation naturelle $\psi^i : \mathscr{F}\big|_{U_i} \longrightarrow \mathscr{F}_i$. On remarque que la condition de commutativité sur $\psi^j = \varphi^{ij}\,\psi^i$ est satisfaite grâce à la manière dont on a défini $\mathscr{F}$.
L'injectivité des ψ^i_V provient du fait que les φ^{ij} sont des isomorphismes : si s et t sont deux éléments de $\varinjlim_{V\subset W}\mathscr{F}(W)$ tels que $s_i\big|_V = t_i\big|_V$, on trouve, en faisant varier j et en utilisant la propriété des φ^{ji}, que toutes les composantes de s et t sont égales.
Pour la surjectivité, soit $s_i \in \mathscr{F}_i(V)$. On pose pour tout $j \in I$

$$s_j = \varphi^{ij}_{U\cap V_i}\big(s_i\big|_{U\cap V_i}\big) \in \mathscr{F}_j(U \cap V_j).$$

Alors, s_i sera l'image de $[V, s]$ dont les composantes sont données par les s_j.
Supposons maintenant que $\big(\mathscr{G}, \eta^i\big)$ soit un autre couple de faisceaux/morphismes satisfaisant les hypothèses. On obtient immédiatement des isomorphismes ρ_i :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}\big|_{U_i} \arrow[r, "\psi^i", "\cong"'] \arrow[rr, bend right, "\rho_i"'] & \mathscr{F}_i \arrow[r, "(\eta^i)^{-1}", "\cong"'] & \mathscr{G}\big|_{U_i}. \end{tikzcd}$$

On fixe un couple $(i,j) \in I \times I$. Dans ce cas, la condition (ii) appliquée aux couples $\big(\mathscr{F}, \psi^i\big)$ et $\big(\mathscr{G}, \eta^i\big)$ entraîne que $\rho_i\big|_{U_i\cap U_j} = \rho_j\big|_{U_i\cap U_j}$. On peut ainsi recoller (voir, par exemple, le lemme 2.2.52) les isomorphismes ρ_i en un isomorphisme $\rho : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$, comme désiré. $\square$

Définition 2.1.57
Dans la proposition ci-dessus, on dit que l'on obtient $\mathscr{F}$ en recollant les $\mathscr{F}_i$ via les isomorphismes φ^{ij}.

Pour finir cette section, on regarde un exemple dans lequel X désigne une variété sur un corps algébriquement clos K et $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des applications régulières (voir exemple 2.1.11).

Exemple 2.1.58
Soit Y un fermé de X. Pour tout ouvert U de X, soit $I_Y(U)$ l'idéal de l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ constitué des applications s'annulant sur $Y \cap U$. Alors, le pré-faisceau $U \longmapsto I_Y(U)$ est un faisceau. Pour voir cela, on se donne un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de U. Puisque les applications de restriction consistent effectivement en restrictions, la condition (i) des faisceaux est vérifiée. Supposons maintenant que l'on se donne une collection d'applications $f_i \in I_Y(U_i)$ telles que $f_i\big|_{U_i\cap U_j} = f_j\big|_{U_i\cap U_j}$, pour tout $(i,j) \in I \times I$. L'hypothèse (ii) sur $\mathcal{O}_X$ nous donne une application $f \in \mathcal{O}_X(U)$ telle que $f\big|_{U_i} = U_i$. A nouveau, on trouve que f est nulle sur $U \cap Y$. On constate que le faisceau I_Y est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_X$.

2.2 Schémas

L'intérêt des schémas est de généraliser les variétés algébriques du premier chapitre. On se rappelle que l'on peut associer à une variété algébrique affine Y son anneau de coordonnées affines $\Gamma(Y) = K[x_1, \ldots, x_n]/_{\mathcal{A}(Y)}$ et que l'étude des variétés affines peut se ramener aux algèbres réduites de type fini (théorème 1.2.35). A la place d'un tel anneau de coordonnées, on choisit de considérer un anneau commutatif quelconque R (qui peut, par exemple, ne pas être intègre, ou contenir des éléments nilpotents). Puisque les idéaux maximaux de $\Gamma(Y)$ sont en bijection avec les points de sa variété Y (théorème 1.2.28), on est tenté de considérer l'ensemble des idéaux maximaux de R. Bien que cela soit parfois considéré (Grothendieck en parle en tant qu'ultra-schémas) l'association n'est pas fonctorielle tandis que si l'on considère l'ensemble $\operatorname{Spec} R$ des idéaux premiers de R, un homomorphisme d'anneaux $R \longrightarrow S$ donne lieu à une application entre $\operatorname{Spec} S$ et $\operatorname{Spec} R$ (puisque la pré-image d'un idéal premier est un idéal premier). En fait, une fois que l'on considère la bonne topologie sur $\operatorname{Spec} R$ (définition 2.2.6) on a un foncteur de **Rng** dans **Top**. Dans une optique de généralisation, il serait intéressant de pouvoir retrouver la donnée de l'anneau sous-jacent à partir de son spectre ; ici, cela n'est clairement pas possible (tout corps a un spectre constitué du seul idéal 0). On associe alors à $\operatorname{Spec} R$ un faisceau d'anneaux (proposition 2.2.16) et le couple obtenu est appelé schéma affine. On constate alors que les choix de départ s'avèrent judicieux car le foncteur Spec mentionné ci-dessus induit une équivalence (contravariante) de catégories entre la catégorie des schémas affines et celle des anneaux -commutatifs et unitaires- (théorème 2.2.53). On peut alors définir un schéma comme un objet localement isomorphe (dans un sens à définir) à un schéma affine. La dernière partie de cette section consiste en l'étude des propriétés de base des schémas et l'on montre finalement que les schémas sont effectivement une généralisation des variétés algébriques définies au chapitre précédent. Les ouvrages de références pour cette partie sont [Har77] et [LE06].

2.2.1 Spectre d'un anneau

Dans toute cette partie un anneau désigne un anneau commutatif unitaire et R un tel anneau. Le lecteur qui n'est pas familier avec les localisations peut regarder les concepts de base dans son livre d'algèbre préféré, par exemple [Gri07].

Définition 2.2.1 (Spec)
Soit R un anneau. On note $\operatorname{Spec} R$ *l'ensemble des idéaux premiers de R.*

Remarque 2.2.2
Puisque la pré-image d'un idéal premier par un homomorphisme d'anneau est un idéal premier, Spec est un foncteur contravariant de **Rng** dans **Set**.

Exemples 2.2.3 (i) Le spectre de $\mathbb{Z}$ peut être identifié à $\mathbb{P} \cup \{0\}$.

(ii) On considère l'inclusion $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[i]$. Si P est un idéal premier de $\mathbb{Z}[i]$, alors $i^{-1}(P) = P \cap \mathbb{Z}$ est premier. Si $P \cap \mathbb{Z} = \{0\}$, alors $P = 0$. En effet, si $a + bi \in P$ alors $a^2 + b^2 \in P \cap \mathbb{Z}$ et donc $a + bi = 0$. Supposons donc que $P = \alpha\mathbb{Z}[i]$ ne soit pas trivial, c'est-à-dire que $P \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, avec $\in \mathbb{P}$. On a $p \in P$ et donc $p\mathbb{Z}[i] \subset P$. Ainsi, si p est congru à 3 modulo 4, $p\mathbb{Z}[i]$ est maximal et donc $P = p\mathbb{Z}[i]$. Sinon, le théorème des deux carrés de Fermat implique que $p = a^2 + b^2$ (a et b sont deux naturels uniquement déterminés). Cela implique que $\alpha = a + bi$ ou $\alpha = a - bi$ (les deux autres cas donnent les même idéaux). En résumé, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i]$ est constitué :
– de l'idéal 0 ;

– des idéaux du type $p\mathbb{Z}[i]$, pour p congru à 3 modulo 4 ;
– des idéaux du type $(a+bi)\mathbb{Z}[i]$ et $(a-bi)\mathbb{Z}[i]$, où $a^2+b^2=p$ si $p=2$ ou p est congru à 1 modulo 4.

(iii) Le spectre d'un corps est trivial.

(iv) Le spectre de $\mathbb{R}[x]$ peut être identifié à l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires auquel on ajoute 0, l'idéal nul.

Définition 2.2.4
A tout idéal I de R, on associe $\mathcal{V}(I)=\big\{P\in\operatorname{Spec}R : I\subset P\big\}$.

Proposition 2.2.5
Soient I, J ainsi que $\{I_k\}_{k\in K}$ des idéaux de R. Alors :

(i) $\mathcal{V}(IJ)=\mathcal{V}(I)\cup\mathcal{V}(J)$;

(ii) $\mathcal{V}\big(\sum_{k\in K} I_k\big)=\bigcap_{k\in K}\mathcal{V}(I_k)$;

(iii) $\mathcal{V}(I)\subset\mathcal{V}(J)$ *si et seulement si* $\sqrt{J}\subset\sqrt{I}$.

Démonstration. (i) Si P est un idéal premier contenant IJ, alors il contient l'un des deux idéaux. Réciproquement, si $P\in\mathcal{V}(I)\cup\mathcal{V}(J)$, on peut supposer que $I\subset P$, ce qui implique que $IJ\subset I\subset P$.

(ii) Soit $P\in\operatorname{Spec}R$ contenant $\sum_{k\in K} I_k$. En particulier, pour tout $k\in K$ et tout $r\in I_k$, on a $r\in\sum_{k\in K} I_k\subset P$. L'autre inclusion est claire.

(iii) Si $\mathcal{V}(I)\subset\mathcal{V}(J)$, l'intersection pour $\sqrt{J}$ se fait sur plus d'idéaux que pour $\sqrt{I}$, ce qui entraîne $\sqrt{J}\subset\sqrt{I}$. Si l'on suppose que $\mathcal{V}(I)\not\subset\mathcal{V}(J)$, on a l'existence d'un $P\in\operatorname{Spec}R$ tel que $I\subset P$ et $J\not\subset P$, ce qui contredit le fait que $\sqrt{J}\subset\sqrt{I}\subset P$. □

Définition 2.2.6 (Topologie de Zariski)
On définit une topologie sur $\operatorname{Spec}R$ *de la manière suivante : un ensemble* $V\subset\operatorname{Spec}R$ *est fermé si et seulement s'il s'écrit* $V=\mathcal{V}(I)$ *pour un idéal* I*. Cette topologie est appelée* topologie de Zariski*.*

Remarques 2.2.7 (i) Le fait que $\mathcal{V}(\{0\})=R$ et $\mathcal{V}(R)=\emptyset$, ainsi que les points (i) et (ii) de la proposition précédente assurent qu'il s'agit effectivement d'une topologie.

(ii) En fait, Spec est un foncteur contravariant de **Rng** dans **Top**.

Notation 2.2.8
Soit $f\in R$. On note $D(f)=\operatorname{Spec}R\setminus\mathcal{V}(\langle f\rangle)$.

Exemple 2.2.9
On revient au spectre $X=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Soit F un fermé propre de X, c'est-à-dire

$$F=\mathcal{V}(\langle n\rangle)=\{p\in\mathbb{P} : p\mathbb{Z}\supset n\mathbb{Z}\}=\{p\in\mathbb{P} : p\mid n\}.$$

Si U est un ouvert non-vide de X, on a

$$U=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}\setminus\mathcal{V}(I)=\{0\}\cup\{p\in\mathbb{P} : p\nmid n\}=D(n),$$

pour un $n\in\mathbb{N}$. En anticipant sur la proposition 2.2.18, on trouve que les germes en $\langle p\rangle$ sont $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ et en 0, le germe est $\mathbb{Z}_{\langle 0\rangle}\cong\mathbb{Q}$.

Proposition 2.2.10
Les $D(f)$ forment une base pour la topologie de Zariski de $\operatorname{Spec} R$.

Démonstration. Les $D(f)$ recouvrent $\operatorname{Spec} R$ puisque $\mathfrak{p} \in D(f)$, pour tout $f \notin \mathfrak{p}$ (qui existe, puisque $\mathfrak{p}$ est premier). Maintenant, si $\mathfrak{p}$ est dans $D(f) \cap D(g)$, alors $\mathfrak{p} \in D(fg) \subset D(f) \cap D(g)$, puisque $\mathfrak{p}$ est premier. Si $U = \operatorname{Spec} R \setminus \mathcal{V}(I)$ est un ouvert et $\mathfrak{p} \in U$, alors il existe $f \in I$ avec $f \notin \mathfrak{p}$ et l'on a $\mathfrak{p} \in D(f) \subset U$. $\square$

Proposition 2.2.11
Soit R un anneau et $f \in R$. Alors f est nilpotent si et seulement si $D(f) = \emptyset$.

Démonstration. On suppose que f est nilpotent et on considère $P \in \operatorname{Spec} R$. On a $f^r = 0 \in P$, ce qui implique $f \in P$. Ainsi, $P \in \mathcal{V}(\langle f \rangle)$ et donc $D(f) = \emptyset$. Réciproquement, si $D(f) = \emptyset$, on a, par la proposition 2.2.18, $R_f \cong 0$. Ainsi, 0 appartient à l'ensemble $\{1, f, f^2, \ldots, \}$, ce qui implique que f est nilpotent. $\square$

Proposition 2.2.12
Soit R un anneau. Alors $\operatorname{Spec} R$ *est irréductible si et seulement si $\sqrt{0}$ est premier, où $\sqrt{0}$ désigne l'ensemble des éléments nilpotents de R.*

Démonstration. On suppose que $\operatorname{Spec} R$ soit irréductible et on considère $f, g \in R$ tels que $fg \in \sqrt{0}$, c'est-à-dire que $(fg)^k = f^k g^k = 0$, pour $k \in \mathbb{N}_0$. On a alors

$$\operatorname{Spec} R = \mathcal{V}(0) = \mathcal{V}(f^k g^k) = \mathcal{V}(\langle f^k \rangle \cdot \langle g^k \rangle) = \mathcal{V}(f^k) \cup \mathcal{V}(g^k).$$

Puisque $\operatorname{Spec} R$ est irréductible, l'un des deux, disons $\mathcal{V}(f^k)$, est égal à $\operatorname{Spec} R$. La proposition précédente implique que f est nilpotent, entraînant que $\sqrt{0}$ est premier. Réciproquement, on suppose que $\sqrt{0}$ est premier et on considère deux ouverts non-vides U et V de $\operatorname{Spec} R$. Comme dans la preuve de la proposition 2.2.10, on trouve $f, g \in R$ tels que $D(f) \subset U$ et $D(g) \subset V$ et $D(fg) \subset D(f) \cap D(g)$. Puisque $D(f)$ et $D(g)$ sont non-vides et que $\sqrt{0}$ est premier, la proposition précédente implique que $D(fg)$ est non-vide, entraînant que $U \cap V$ est non-vide. $\square$

Proposition 2.2.13
L'espace topologique $\operatorname{Spec} R$ *est compact.*

Démonstration. On utilise la caractérisation par les fermés. Soit V_i, $i \in I$, un ensemble de fermés tels que pour tout $J \subset I$ avec J fini, on a $\bigcap_{j \in J} V_j \neq \emptyset$. Soit I_i des idéaux tels que $V_i = \mathcal{V}(I_i)$, pour tout i. Supposons que $\bigcap_{i \in I} V_i = \emptyset$, c'est-à-dire que $\sum_{i \in I} I_i = R$ (point (ii) de la proposition précédente). Ainsi, il existe $J \subset I$ tel que $1 \in \sum_{j \in J} I_j$, ce qui entraîne $\mathcal{V}\big(\sum_{j \in J} I_j\big) = \emptyset$, contradiction. $\square$

Proposition 2.2.14
L'espace topologique $\operatorname{Spec} R$ *n'est pas forcément de Hausdorff.*

Démonstration. Il suffit de choisir un anneau contenant un idéal premier P non maximal. Alors, $\{P\}$ ne sera pas fermé. $\square$

Notation 2.2.15
Soit P un idéal premier de R. On note R_P la localisation par rapport à l'ensemble multiplicatif $R \setminus P$.

Proposition 2.2.16
Soit U un ouvert de $\operatorname{Spec} R$. *On considère les applications* $s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p}\in U} R_{\mathfrak{p}}$ *satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) *Pour tout $\mathfrak{p} \in U$, $s(\mathfrak{p}) \in R_{\mathfrak{p}}$.*

(ii) *Pour tout $\mathfrak{p} \in U$, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de $\mathfrak{p}$ et $a, f \in R$ tels que pour tout $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ et $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f}$.*

Si l'on définit $\mathcal{O}(U)$ comme étant l'ensemble des applications s satisfaisant ces deux conditions, alors $\mathcal{O}$ est un faisceau d'anneaux sur $\operatorname{Spec} R$ *(qui a comme produit le produit d'applications).*

Démonstration. Pour commencer, on constate que les fonctions identiquement 0 et 1 satisfont les deux conditions. Si s, t sont deux éléments de $\mathcal{O}(U)$ et V, W ainsi que a, b, f, h sont les éléments donnés par la condition (ii), on trouve, pour tout $\mathfrak{q} \in V \cap W$:

$$s(\mathfrak{q}) + t(\mathfrak{q}) = \frac{ag + bf}{fg}, \quad s(\mathfrak{q}) \cdot t(\mathfrak{q}) = \frac{ab}{fg},$$

avec $fg \notin \mathfrak{q}$, puisque $\mathfrak{q}$ est premier. Ainsi, chaque $\mathcal{O}(U)$ est un anneau. Pour deux ouverts $U' \subset U$, l'application de restriction est la restriction des fonctions, ce qui entraîne que $\mathcal{O}$ est un foncteur de $\mathscr{T}_{\operatorname{Spec} R}$ dans **Rng**. La condition ($\star$) d'un faisceau est vérifiée puisque l'on utilise des restrictions. Pour la condition ($\star\star$), on recolle les fonctions s_i en une fonction s et le fait que les conditions (i) et (ii) sont définies de manière locale implique qu'elles seront vérifiées par s. □

Définition 2.2.17 (Spectre d'un anneau)
Soit R un anneau. Le spectre *de R consiste en l'espace topologique* $\operatorname{Spec} R$ *et du faisceau $\mathcal{O}$ défini ci-dessus.*

Proposition 2.2.18
Soit $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O})$ *le spectre d'un anneau R. Alors :*

(i) *pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}$;*

(ii) *pour tout $f \in R$, on a $\mathcal{O}(D(f)) \cong R_f$, qui est la localisation en f (c'est-à-dire par rapport à l'ensemble multiplicatif $\{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$) ;*

(iii) $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} R) \cong R$.

Démonstration. (i) On commence par définir une application $\varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \longrightarrow R_{\mathfrak{p}}$ qui envoie $[(U, s)]$ sur $s(\mathfrak{p})$. On constate que cette application est bien définie car si $s \sim g$, on a l'existence d'un voisinage ouvert W de x sur lequel les deux fonctions coïncident. Puisqu'il s'agit d'une évaluation, l'application φ est un homomorphisme d'anneaux. Si $[(U, s)]$ est tel que $\varphi\big([(U, s)]\big) = 0$, alors il existe un voisinage ouvert V de $\mathfrak{p}$ tel que $s\big|_V = 0$, ce qui implique que $s \sim 0$, et donc que φ est injectif. Soit maintenant $\frac{a}{f} \in R_{\mathfrak{p}}$. On définit sur $D(f)$ l'application s qui envoie $\mathfrak{q}$ sur $\frac{a}{f}$, d'où la surjectivité.

(ii) On construit une application $\psi : R_f \longrightarrow \mathcal{O}(D(f))$: un élément $\frac{a}{f^k} \in R_f$ est envoyé sur l'application

$$\psi\left(\frac{a}{f^k}\right) : D(f) \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p}\in U} R_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{q} \longmapsto \frac{a}{f^k} \in R_{\mathfrak{q}},$$

qui est bien définie. Supposons que $a, b \in R$ et $k, m \in \mathbb{N}$ soient tels que $\psi\left(\frac{a}{f^k}\right) = \psi\left(\frac{b}{f^m}\right)$, c'est-à-dire qu'il existe $r \in R$ avec $r\big(f^m a - b f^k\big) = 0$. Si on définit I

comme étant l'annulateur de $f^m a - bf^k$, on a $I \neq 0$ et $I \not\subset \mathfrak{q}$, pour tout $\mathfrak{q} \in D(f)$. Cela implique que $\mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(f)$ et donc que $f \in \sqrt{I}$, par la proposition 2.2.5. Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n\big(f^m a - bf^k\big) = 0$, ce qui entraîne l'injectivité de ψ. En ce qui concerne la surjectivité, c'est un petit peu technique. Je me contente de donner les grandes lignes, la démonstration complète pouvant être trouvée à la page 71 de [Har77]. Si s est une application de $\mathcal{O}(D(f))$, on commence par montrer qu'il existe des $h_i \in R$, avec $i \in I$, tels que $D(f)$ est recouvert par les $D(h_i)$ et que s est $\frac{a_i}{h_i}$ sur $D(h_i)$ (avec des $a_i \in R$). La deuxième étape consiste à montrer que seul un nombre fini des $D(h_i)$ suffit pour recouvrir $D(f)$. Cet argument permet de recombiner les a_i et les f_i en a et h respectivement afin d'avoir $s = \psi\left(\frac{a}{f}\right)$.

(iii) Provient directement de (ii) avec $f = 1$.

□

2.2.2 Espaces annelés et localement annelés

Définition 2.2.19 (Espace annelé)
Un espace annelé *est un couple $(X, \mathcal{O}_X)$, où X est un espace topologique et $\mathcal{O}_X$ un faisceau d'anneaux sur X.*

Définition 2.2.20 (Morphisme d'espaces annelés)
Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés. Un morphisme d'espaces annelés *de $(X, \mathcal{O}_X)$ vers $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un couple $(f, f^\sharp)$, où $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue et $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ est un morphisme de faisceaux.*

Définition 2.2.21 (Espace localement annelé)
Un espace localement annelé *est un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que pour tout $x \in X$, le germe $\mathcal{O}_{x,X}$ soit un anneau local.*

Définition 2.2.22 (Homomorphisme d'anneaux locaux)
Soient R_1 et R_2 deux anneaux locaux. Un homomorphisme d'anneaux $\varphi : R_1 \longrightarrow R_2$ est un homomorphisme d'anneaux locaux *si la pré-image de l'idéal maximal de R_2 par φ est l'idéal maximal de R_1.*

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sont deux espaces annelés et $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme, la propriété universelle de la limite directe induit pour tout $x \in X$ un morphisme

$$f_x^\sharp : \varinjlim_{f(x) \in V} \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \varinjlim_{f(x) \in V} \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(V)\big),$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de $f(x)$. Puisque pour tout ouvert U de X on a $U \subset f^{-1}f(U)$, l'ensemble $\big\{f^{-1}(V) : V \text{ voisinage ouvert de } f(x)\big\}$ est cofinal dans l'ensemble des voisinages ouverts de x, ce qui implique que

$$\varinjlim_{f(x) \in V} \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(V)\big) \cong \mathcal{O}_{x,X},$$

par la proposition A.3.11. Pour tout $x \in X$, on a donc un morphisme induit entre les germes $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{f(x),Y} \longrightarrow \mathcal{O}_{x,X}$.

Définition 2.2.23 (Morphisme d'espaces localement annelés)
Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces localement annelés. Un morphisme d'espaces localement annelés *de $(X, \mathcal{O}_X)$ vers $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme d'espaces annelés $(f, f^\sharp)$ tel que pour tout $x \in X$, le morphisme induit décrit ci-dessus soit un homomorphisme d'anneaux locaux.*

Remarque 2.2.24
On vérifie facilement que la composition de deux morphismes d'espaces localement annelés ainsi que l'identité sont des morphismes d'espaces localement annelés.

Remarque 2.2.25
Un isomorphisme d'espaces localement annelés est un couple d'isomorphismes, c'est-à-dire que f est un homéomorphisme et $f^\sharp$ est un isomorphisme de faisceaux (dans ce cas, chaque $f_x^\sharp$ est un isomorphisme).

Proposition 2.2.26 (*i*) *Pour tout anneau R, $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O})$ est un espace localement annelé.*

(*ii*) *Si $\varphi : R \longrightarrow S$ est un homomorphisme d'anneaux, alors φ induit un morphisme d'espaces localement annelés $(f, f^\sharp) : (\operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}) \longrightarrow (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$.*

(*iii*) *Si R et S sont des anneaux, tout morphisme d'espaces localement annelés de $\operatorname{Spec} S$ vers $\operatorname{Spec} R$ est induit par un homomorphisme $\varphi : R \longrightarrow S$.*

Démonstration. (i) Provient de la proposition 2.2.18 et du fait que $R_\mathfrak{p}$ est un anneau local pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$.

(ii) On a vu plus haut (remarque 2.2.7) que φ induit une application continue f de $\operatorname{Spec} S$ vers $\operatorname{Spec} R$. On souhaite alors définir un morphisme de faisceaux $f^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}$. On considère un ouvert U de $\operatorname{Spec} R$ et une application $s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p}\in U} R_\mathfrak{p}$. On définit alors

$$\begin{aligned} t : f^{-1}(U) &\longrightarrow \coprod_{\mathfrak{q}\in f^{-1}(U)} S_\mathfrak{q} \\ Q &\longmapsto \varphi_Q\, s\, f(Q), \end{aligned}$$

où φ_Q est l'application décrite dans la proposition A.1.18. On remarque que la condition (*i*) est vérifiée, c'est-à-dire que $t(Q) \in S_Q$, pour tout $\mathfrak{q} \in f^{-1}(V)$. Comme l'application s vérifie la condition (*ii*), on obtient un ouvert V contenu dans U et deux éléments a et f. On a alors que $t\big|_{f^{-1}(V)} = \frac{\varphi(a)}{\varphi(f)}$, ce qui entraîne que $t \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\big(f^{-1}(U)\big)$. Via l'identification présentée dans la proposition 2.2.18, on constate que l'application induite sur les germes $f_\mathfrak{p}^\sharp$ est en fait $\varphi_\mathfrak{p}$, qui est un homomorphisme d'anneaux locaux.

(iii) Par hypothèse, on a un morphisme $f^\sharp_{\operatorname{Spec} R} : \mathcal{O}_R(\operatorname{Spec} R) \longrightarrow \mathcal{O}_S(\operatorname{Spec} S)$ et le point (*iii*) de la proposition 2.2.18 entraîne l'existence d'un homomorphisme $\varphi : R \longrightarrow S$; on a donc les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_R(\operatorname{Spec} R) \arrow[r, "f^\sharp_{\operatorname{Spec} R}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_S(\operatorname{Spec} S) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{f(\mathfrak{q}),R} \arrow[r, "f^\sharp_\mathfrak{q}"'] & \mathcal{O}_{\mathfrak{q},S} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_R"'] & S \arrow[d, "i_S"] \\ R_{f(\mathfrak{q})} \arrow[r] & S_\mathfrak{q}. \end{tikzcd}$$

Le premier provient de la situation donnée (f et $f^\sharp$) tandis que le second utilise les identifications présentées dans la proposition 2.2.18. Le fait que $f_\mathfrak{q}^\sharp$ soit local entraîne que $(f_\mathfrak{q}^\sharp)^{-1}(\mathfrak{q}S_\mathfrak{q}) = f(\mathfrak{q})R_{f(\mathfrak{q})}$. De plus, la commutativité du second diagramme implique que $\varphi^{-1}\, i_S^{-1} = i_R^{-1}\, {f_Q^\sharp}^{-1}$. En évaluant en Q et en utilisant le fait que i_R, respectivement i_S, induit une bijection entre les idéaux premiers de R disjoints de $f(\mathfrak{q})$, respectivement les idéaux premiers de S disjoints de $\mathfrak{q}$, et les idéaux premiers de $R_{f(\mathfrak{q})}$, respectivement $S_{\mathfrak{q}}$, on trouve $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = f(\mathfrak{q})$. Ainsi f provient bien de φ. L'application induite sur les germes par φ est localement $\varphi_{\mathfrak{p}}$ (voir point (ii)), qui coïncide avec $f^\sharp_{\mathfrak{p}}$. Ainsi, $(f, f^\sharp)$ provient bien de φ, comme désiré.

□

2.2.3 Schémas

On peut (enfin) définir ce qu'est un schéma. Tout d'abord, on commence par un cas particulier.

Définition 2.2.27 (Schéma affine)
Un schéma affine *est un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ qui est isomorphe (en tant qu'espace localement annelé) au spectre d'un anneau quelconque.*

Définition 2.2.28 (Faisceau structural)
Le faisceau $\mathcal{O}_X$ d'un schéma affine $(X, \mathcal{O}_X)$ est appelé faisceau structural.

Définition 2.2.29 (Schéma)
Un schéma *est un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U ayant la propriété que $(U, \mathcal{O}_X\big|_U)$ est un schéma affine.*

Remarque 2.2.30
Par abus de notation, on notera parfois X pour le couple $(X, \mathcal{O}_X)$. Dans ce cas, $\mathrm{sp}(X)$ (« space » de X) désigne l'espace topologique sous-jacent du schéma.

Après ces nombreuses définitions, il est temps de voir quelques exemples classiques.

Exemple 2.2.31
Si K est un corps, $\operatorname{Spec} K = \{0\}$. De plus, l'ensemble des applications de $\{0\}$ dans $K_{\{0\}} \cong K$ est en bijection avec K. On a donc $(\operatorname{Spec} K, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}) \cong \big(\{0\}, K\big)$.

Définition 2.2.32 (Point générique)
Dans un espace topologique X, x est un point générique *si $x \notin \overline{\{y\}}$, pour tout $y \neq x$.*

Proposition 2.2.33
Dans $\operatorname{Spec} R$, les points génériques sont exactement les idéaux premiers minimaux (c'est-à-dire les idéaux premiers qui ne contiennent pas d'autres idéaux premiers). En particulier, si R est intègre, alors 0 est le seul point générique.

Exemple 2.2.34
On considère maintenant le cas de $K[x]$ pour lequel $\operatorname{Spec} K[x]$ est noté $\mathbb{A}^1_K$ et appelé *droite affine*. Puisque $K[x]$ est principal, $\mathbb{A}^1_K$ est en bijection avec l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles non-constants auquel on ajoute un élément correspondant à l'idéal 0. Pour chacun de ces polynômes, l'idéal associé est maximal, ce qui implique que les points correspondants dans $\operatorname{Spec} R$ sont fermés. Par contre, l'adhérence du point correspondant à 0 est tout $\mathbb{A}^1_K$. On constate alors que 0 est un point générique.

Dans l'exemple ci-dessus, on constate que si K est algébriquement clos, les points fermés de $\mathbb{A}^1_K$ sont en bijection avec les éléments de K. Cette remarque va jouer un rôle fondamental pour la suite : on va voir qu'à quelques éléments génériques près les variétés présentées dans le chapitre 1 peuvent être vues comme des schémas. En ce sens, les schémas forment une généralisation des variétés.

Exemple 2.2.35
On considère pour un corps K algébriquement clos $\mathbb{A}^2_K = \operatorname{Spec} K[x,y]$, que l'on appelle *plan affine*. La proposition 1.1.31 indique qu'un idéal maximal de $K[x,y]$ s'écrit $\langle x-a, y-b\rangle$ pour $a,b \in K$. Ainsi, les singletons fermés de $\mathbb{A}^2_K$ sont en bijection avec K^2. En fait, on a un homéomorphisme entre $\mathbb{A}^2$ et l'ensemble de ces singletons fermés, que l'on va noter $\mathcal{S}$. Pour voir cela, on considère la bijection ϕ suivante :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{A}^2 &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (a,b) &\longmapsto \langle x-a, y-b\rangle. \end{aligned}$$

On commence par montrer que ϕ est une application fermée. Pour cela, il suffit de montrer que $\phi\big(\mathcal{V}_{aff}(I)\big) = \mathcal{V}(I) \cap \mathcal{S}$ pour tout idéal I de $K[x,y]$. Soit M un élément de $\phi\big(\mathcal{V}_{aff}(I)\big)$, disons $M = \langle x-a, y-b\rangle$. On aimerait voir que $M \in \mathcal{V}(I)$, c'est-à-dire $I \subset M$. Pour cela, on considère un polynôme $f \in I$ et, puisque $(a,b) \in \mathcal{V}_{aff}(I)$, on a $f(a,b) = 0$. En considérant $f(x,y) \in \big(K[x]\big)[y]$ on peut diviser $f(x,y)$ par $y-b$ (puisque ce polynôme est unitaire) et l'on obtient $f(x,y) = (y-b)g(x,y) + r(x)$. En divisant $r(x)$ par $x-a$, on trouve $f(x,y) \in \langle x-a, y-b\rangle = M$. Réciproquement, si $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}(I)$, on a $I \subset M = \langle x-a, y-b\rangle$ pour $(a,b) \in \mathbb{A}^2$. Pour $f \in I$, on a $f(a,b) = 0$, ce qui entraîne que $(a,b) \in \mathcal{V}_{aff}(I)$, comme désiré. Ainsi, ϕ est une application fermée. En appliquant ϕ^{-1} des deux côtés de l'égalité, on obtient que ϕ est un homéomorphisme.
A nouveau, l'idéal $\{0\}$, dont l'adhérence est tout $\mathbb{A}^2_K$, est un point générique.

Exemple 2.2.36
Soient $(X_1, \mathcal{O}_1)$ et $(X_2, \mathcal{O}_2)$ deux schémas, deux ouverts U_1 et U_2 de X_1 et X_2, respectivement, ainsi que $\big(\varphi, \varphi^\sharp\big) : \big(U_1, \mathcal{O}_1|_{U_1}\big) \longrightarrow \big(U_2, \mathcal{O}_2|_{U_2}\big)$ un isomorphisme d'espace localement annelés. On définit X en considérant le quotient de $X_1 \coprod X_2$ par la relation $x \sim \varphi(x)$ ou, ce qui revient au même, en considérant le pushout :

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[rr, hook, "j_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & & X_1 \arrow[dd, "i_1"] \\
U_2 \arrow[d, hook, "j_2"'] & & \\
X_2 \arrow[rr, "i_2"'] & & X_1 \coprod_\varphi X_2
\end{tikzcd}$$

On obtient alors deux applications $i_1 : X_1 \longrightarrow X$ et $i_2 : X_2 \longrightarrow X$ est l'on constate qu'un sous-ensemble V de X est ouvert si et seulement si $i_1^{-1}(V)$ est ouvert dans X_1 et $i_2^{-1}(V)$ est ouvert dans X_2. Pour tout ensemble ouvert W de X_1, on a un homomorphisme

$$\tilde{p}_{1,W} : \mathcal{O}_1(W) \longrightarrow \varinjlim_{U} \mathcal{O}_1(U),$$

où U parcourt les ouverts de X_1 contenant $W \cap U_1$: un élément s est envoyé sur $[(W,s)]$. On obtient alors $p_{1,W} : \mathcal{O}_1(W) \longrightarrow \left(\mathcal{O}_1|_{U_1}\right)(W \cap U_1)$ en composant $\tilde{p}_{1,W}$

avec le morphisme θ donné dans la définition du faisceau associé. On remarque que si $V \subset W$ sont deux ouverts de X_1, on a

$$\tilde{p}_{1,W}(s)\big|_{V\cap U_1} = \tilde{p}_{1,W}\big(s|_V\big), \quad \forall s \in \mathcal{O}_1(W) \tag{2.1}$$

et cette propriété se transmet à p_1. Les même « morphismes » p_2 et $\tilde{p}_2$ existent pour $\mathcal{O}_2$. On considère alors $\mathcal{O}(V)$ comme étant le pullback (d'anneaux) suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(V) \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathcal{O}_2\big(i_2^{-1}(V)\big) \arrow[d, "p_{2,i_2^{-1}(V)}"] \\
 & \mathcal{O}_2\big|_{U_2}\big(i_2^{-1}(V)\cap U_2\big) \arrow[d, "\varphi^\sharp_{i_2^{-1}(V)\cap U_2}"] \\
\mathcal{O}_1\big(i_1^{-1}(V)\big) \arrow[r, "p_{1,i_1^{-1}(V)}"'] & \mathcal{O}_1\big|_{U_1}\big(i_1^{-1}(V)\cap U_1\big)
\end{tikzcd}$$

Il faut vérifier que le codomaine du morphisme $\varphi^\sharp_{i_2^{-1}(V)\cap U_2}$ est le bon. Pour cela, on utilise les propriétés du pushout défini plus haut :

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}\big(i_2^{-1}(V)\cap U_2\big) &= \varphi^{-1}\, j_2^{-1}\, i_2^{-1}(V) \\
&= (i_1\, j_1)^{-1}(V) = i_1^{-1}(V)\cap U_1.
\end{aligned}$$

Pour les applications de restriction, on utilise simplement les applications de restriction sur $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ composante par composante. Il est cependant nécessaire de vérifier que la restriction d'un élément appartient bien au pullback. Pour cela, on considère deux ouverts $U \subset V$ de X et on calcule :

$$\begin{aligned}
\varphi^\sharp_{i_2^{-1}(U)\cap U_2} \circ p_{2,i_2^{-1}(U)}\Big(s_2\big|_{i_2^{-1}(U)}\Big) &\overset{(2.1)}{=} \varphi^\sharp_{i_2^{-1}(U)\cap U_2} \circ \Big(p_{2,i_2^{-1}(V)}(s_2)\big|_{i_2^{-1}(U)\cap U_2}\Big) \\
&= \Big(\varphi^\sharp_{i_2^{-1}(V)\cap U_2} \circ p_{2,i_2^{-1}(V)}(s_2)\Big)\big|_{i_1^{-1}(U)\cap U_1} \\
&= p_{1,i_1^{-1}(V)}(s_1)\big|_{i_1^{-1}(U)\cap U_1} \\
&= p_{1,i_1^{-1}(U)}\Big(s_1\big|_{i_1^{-1}(U)}\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi, $(s_1,s_2)\big|_U = \big(s_1\big|_{i_1^{-1}(U)}, s_2\big|_{i_2^{-1}(U)}\big)$ appartient à $\mathcal{O}(U)$. Le fait que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ soient des faisceaux implique maintenant que $\mathcal{O}$ est un pré-faisceau. Si V est un ouvert de X et $\{V_k\}$, $k \in I$, est un recouvrement de V, alors $\{i_1^{-1}(V_k)\}$ est un recouvrement de $i_1^{-1}(V)$ et $\{i_2^{-1}(V_k)\}$ est un recouvrement de $i_2^{-1}(V)$, ce qui implique que la condition de localité est satisfaite par $\mathcal{O}$.
Si s^k est une collection d'éléments avec $s^k \in \mathcal{O}(V_k)$ et $s^k\big|_{V_k\cap V_l} = s^l\big|_{V_k\cap V_l}$ pour tous $k,l \in K$, le fait que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ soient des faisceaux nous fournit un élément $s = (s_1,s_2) \in \mathcal{O}_1\big(i_1^{-1}(V)\big) \times \mathcal{O}_2\big(i_2^{-1}(V)\big)$ tel que $s\big|_{V^k} = s^k$ pour tout $k \in K$. La condition de localité et le fait que chaque s^k appartienne à $\mathcal{O}(V^k)$ entraîne que $s \in \mathcal{O}(V)$, Ainsi, $\mathcal{O}$ est un faisceau et $(X,\mathcal{O})$ est un espace annelé.
Pour voir que $(X,\mathcal{O})$ est localement annelé, on remarque que si $s_x \in \mathcal{O}_x$ est inversible, alors il existe $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$ tels que $s_{1,x_1} \in \mathcal{O}^*_{1,x_1}$ et $s_{2,x_2} \in \mathcal{O}^*_{2,x_2}$. Ainsi, les éléments non inversibles de $\mathcal{O}_x$ forment un idéal de $\mathcal{O}_x$, entraînant que $\mathcal{O}_x$ est un anneau local. Pour montrer que $\mathcal{O}$ est un schéma, on choisit un élément $[x] \in X$ et on

peut supposer, sans perte de généralité, que $x \in X_1$. Par hypothèse, il existe un ouvert U de X_1 tel que $\left(U, \mathcal{O}_1\big|_U\right)$ soit affine. L'exemple 2.2.49 indique que le morphisme de $\left(U, \mathcal{O}_1\big|_U\right)$ dans $(X_1, \mathcal{O}_1)$ est une immersion ouverte. La caractérisation 2.2.51 permet de voir que le morphisme de $(X_1, \mathcal{O}_1)$ dans $(X, \mathcal{O})$ est aussi une immersion ouverte. On obtient donc une immersion ouverte de $\left(U, \mathcal{O}_1\big|_U\right)$ dans $(X, \mathcal{O})$ et l'on constate que $[x]$ est dans l'image de l'application des espaces topologiques sous-jacents. Ainsi, $[x]$ possède bien un voisinage affine, ce qui implique que $(X, \mathcal{O})$ est un schéma.

2.2.4 Schéma réduits

Définition 2.2.37 (Schéma réduit)
Un schéma $(X, \mathcal{O}_X)$ est dit réduit *si pour tout ouvert U de X l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit (définition A.1.7).*

Proposition 2.2.38
Un schéma $(X, \mathcal{O}_X)$ est réduit si et seulement si l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit pour tout $x \in X$.

Démonstration. Supposons que $(X, \mathcal{O}_X)$ soit réduit et considérons $x \in X$ ainsi qu'un élément nilpotent $[U, s]$. C'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $W \subset U$ tel que $(s|_W)^n = 0$. Puisque $\mathcal{O}_X(W)$ est réduit, on a $s|_W$ et donc $[U, s] \sim 0$, comme désiré. Réciproquement, supposons que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit réduit pour tout $x \in X$. Si $s \in \mathcal{O}_X(U)$ est tel que $s^n = 0$, on a $s_x = 0$, pour tout $x \in U$. Cette condition nous fournit un recouvrement ouvert $\{W_x\}_{x \in U}$ de U vérifiant $s\big|_{W_x} = 0$. Ainsi, $s = 0$, comme désiré. □

Proposition 2.2.39
Soit $(X, \mathcal{O})$ un schéma. Soit $\mathcal{O}_{\text{red}}$ le faisceau associé au pré-faisceau $U \longmapsto \mathcal{O}(U)_{\text{red}}$ (voir notation A.1.11). Alors, $\left(X, \mathcal{O}_{\text{red}}\right)$ est un schéma.

Démonstration. Pour commencer, on remarque qu'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : R \longrightarrow R'$ passe au quotients :

$$\begin{aligned} \varphi : R/\sqrt{0} &\longrightarrow R'/\sqrt{0} \\ r + \sqrt{0} &\longmapsto \varphi(r) + \sqrt{0}. \end{aligned}$$

Ainsi, $U \longmapsto \mathcal{O}(U)_{\text{red}}$ définit bien un pré-faisceau $\mathscr{F}$. On doit montrer que $\mathcal{O}_{\text{red}}$ est un anneau local. Pour cela, on considère d'abord l'homomorphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \varphi : \varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}(U)/\sqrt{0} &\longrightarrow \mathcal{O}_x/\sqrt{0} \\ \left[U, s + \sqrt{0}\right] &\longmapsto [U, s] + \sqrt{0}, \end{aligned}$$

et l'on constate qu'il s'agit d'un isomorphisme. En utilisant la proposition 2.1.29, on a pour tout $x \in X$

$$\mathcal{O}_{\text{red},x} \cong \varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}(U)/\sqrt{0} \cong \mathcal{O}_x/\sqrt{0}.$$

Ainsi, puisque le quotient d'un anneau local est local, $\mathcal{O}_{\text{red}}$ est un espace localement annelé.
Puisque X est un schéma, il existe pour tout $x \in X$ un voisinage ouvert U de x tel que $\left(U, \mathcal{O}\big|_U\right) \cong \left(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}\right)$. On aimerait voir que $\left(U, \mathcal{O}_{\text{red}}\big|_U\right)$ est isomorphe à $\left(\operatorname{Spec} R_{\text{red}}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_{\text{red}}}\right)$. On se fixe donc x, U et R comme mentionné ainsi que l'isomorphisme $(f, f^\sharp) : \left(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}\right) \longrightarrow \left(U, \mathcal{O}\big|_U\right)$ et on pose $S = R_{\text{red}}$. Soit

$(g, g^\sharp) : (\operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}) \longrightarrow (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ le morphisme induit par $\pi : R \longrightarrow S$, l'application de passage au quotient (voir proposition 2.2.26). On aimerait montrer que $\big(X, \mathcal{O}_{\text{red}}\big) \cong (\operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S})$. On dispose pour l'instant des applications suivantes

$$\operatorname{Spec} S \xrightarrow[\cong]{g} \operatorname{Spec} R \xrightarrow[\cong]{f} U$$

(le fait que g soit un homéomorphisme provient du théorème de correspondance et du fait que tout idéal premier contient l'idéal $\sqrt{0}$). Pour un ouvert V de U, on considère la suite d'homomorphismes suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(V) \arrow[r] & \varinjlim_{V \subset W} \mathcal{O}(W) \arrow[r, "\theta"] & \big(\mathcal{O}\big|_U\big)(V) \arrow[r, "f_V^\sharp"] & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}\big(f^{-1}(V)\big) \arrow[d, "g^\sharp_{f^{-1}(V)}"] \\
 & & & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\big((fg)^{-1}(V)\big).
\end{tikzcd}$$

Le fait que l'image d'un élément nilpotent par un homomorphisme d'anneau soit nilpotente entraîne que cette application passe au quotient, nous donnant un homomorphisme $\alpha_V : \mathcal{O}(V)_{\text{red}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\big((fg)^{-1}(V)\big)$. On obtient alors la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathcal{O}_{\text{red}}\big|_U\big)(V) \arrow[r, "h_V^\sharp"] & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\big((fg)^{-1}(V)\big) \\
\varinjlim_{V \subset W} \mathcal{O}_{\text{red}}(W) \arrow[u, "\theta'"] \arrow[ur, bend right, "\tilde{\beta}_V"] & \\
\varinjlim_{V \subset W} \mathcal{O}(W)_{\text{red}} \arrow[u, "\theta"] \arrow[uur, bend right, "\tilde{\alpha}_V"'] &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme α_V est induit par la propriété universelle de la limite directe ; l'homomorphisme $\tilde{\beta}_W : O_{\text{red}}(W) \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\big((fg)^{-1}(V)\big)$ est une composante d'un morphisme induit par la propriété universelle du faisceau associé et $\tilde{\beta}_V$ provient de la propriété universelle de la limite directe. Pour finir, $h_V^\sharp$ est une composante du morphisme induit par la propriété universelle du faisceau associé pour $\mathcal{O}_{\text{red}}\big|_U$. On a alors un morphisme d'espaces annelés $(h, h^\sharp) : \big(\operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\big|_U\big) \longrightarrow \big(U, \mathcal{O}_{\text{red}}\big|_U\big)$. Pour chaque $\mathfrak{p}/\sqrt{0} \in \operatorname{Spec} S$, on a un homomorphisme induit

$$h^\sharp_{\mathfrak{p}/\sqrt{0}} : \big(\mathcal{O}_{\text{red}}\big|_U\big)_{h(\mathfrak{p}/\sqrt{0})} \longrightarrow \big(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\big|_U\big)_{\mathfrak{p}/\sqrt{0}}.$$

On utilise divers isomorphismes afin de simplifier le domaine et le codomaine de cet homomorphisme :

$$\big(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\big|_U\big)_{\mathfrak{p}/\sqrt{0}} \overset{2.1.53}{\cong} \big(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\big)_{\mathfrak{p}/\sqrt{0}} \overset{2.2.18}{\cong} S_{\mathfrak{p}/\sqrt{0}} \overset{A.1.19}{\cong} R_{\mathfrak{p}}/\sqrt{0} = \big(R_{\mathfrak{p}}\big)_{\text{red}},$$

et

$$\big(\mathcal{O}_{\text{red}}\big|_U\big)_{h(\mathfrak{p}/\sqrt{0})} \overset{2.1.53}{\cong} \big(\mathcal{O}_{\text{red}}\big)_{h(\mathfrak{p}/\sqrt{0})} = \big(\mathcal{O}_{\text{red}}\big)_{f(\mathfrak{p})} \overset{A.1.19}{\cong} \big(\mathcal{O}_{f(\mathfrak{p})}\big)_{\text{red}} \overset{2.2.18}{\cong} \big(R_{\mathfrak{p}}\big)_{\text{red}}.$$

En fait, l'homomorphisme $h^\sharp_{\mathfrak{p}/\sqrt{0}}$ correspond exactement à cette chaîne d'isomorphismes. En particulier, $h^\sharp_{\mathfrak{p}/\sqrt{0}}$ est un homomorphisme d'anneaux locaux et $h^\sharp$ est un isomorphisme de faisceaux (voir proposition 2.1.18). Ainsi, $(h, h^\sharp)$ est un isomorphisme d'espaces localement annelés et $\mathcal{O}_{\text{red}}$ est un schéma, comme désiré. $\square$

Définition 2.2.40 (Schéma réduit)
Le schéma $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{red}})$ *défini ci-dessus, que l'on note parfois* X_{red}*, est appelé* schéma réduit.

Proposition 2.2.41
Soit $(X, \mathcal{O})$ *un schéma et* $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{red}})$ *le schéma réduit associé. Alors, il existe un morphisme de schémas* $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_{\mathrm{red}}) \longrightarrow (X, \mathcal{O})$ *tel que* f *soit un homéomorphisme sur l'espace topologique sous-jacent.*

Démonstration. Puisque les deux schémas ont le même espace topologique sous-jacent, on prend $f = \mathrm{id}$. Pour définir $f^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathrm{id}_* \mathcal{O}_{\mathrm{red}}$, on considère pour un ouvert U de X

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f^\sharp_U"'] & \mathcal{O}(U)_{\mathrm{red}} \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathrm{red}}(U), \end{tikzcd}$$

où le premier morphisme est l'homomorphisme de passage au quotient et le second est celui induit dans la construction du faisceau associé. Pour tout $x \in X$, on a les isomorphismes suivants :

$$\mathcal{O}_{\mathrm{red},x} \cong \varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}(U)_{\mathrm{red}} \cong \mathcal{O}_{x,\mathrm{red}},$$

et l'on constate que l'homorphisme induit $f^\sharp_x$ est juste l'application de passage au quotient, qui est un homomorphisme local. Ainsi, $(f, f^\sharp)$ est bien un morphisme de schémas. □

2.2.5 Premières propriétés

Définition 2.2.42 (Corps résiduel)
Soit X *un schéma. Pour tout* $x \in X$*, on considère son anneau local* $\mathcal{O}_x$ *et* M_x *son idéal maximal. On définit son* corps résiduel *en* x *comme étant le corps* $k(x) = \mathcal{O}_x/M_x$.

Exemple 2.2.43
On reprend l'exemple $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. On a vu (exemple 2.2.9) que $\mathcal{O}_p = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$, pour tout $p \in \mathbb{P}$. On consière l'application de passage au quotient $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ qui induit un homomorphisme $\bar{\varphi} : \mathbb{Z}_{\langle p \rangle} \longrightarrow \mathbb{F}_p$. On constate que le noyau de cette application est l'idéal P vu dans $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$, ce qui entraîne que $k(p) \cong \mathbb{F}_p$.

Proposition 2.2.44
Soit X *un schéma et* K *un corps. Donner un morphisme de* $\operatorname{Spec} K$ *dans* X *est équivalent à donner un point de* $x \in X$ *et une inclusion* $k(x) \longrightarrow K$.

Démonstration. On se rappelle que $(\operatorname{Spec} K, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}) \cong (0, K)$. Ainsi, un morphisme $(f, f^\sharp)$ de $\operatorname{Spec} K$ dans X désigne un point $x \in X$ (l'image de 0). En prenant le morphisme induit sur les germes $f^\sharp_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow K$, on trouve que $M_x = \ker f^\sharp_x$ (puisque $\{0\}$ est l'unique idéal maximal de K et que sa pré-image doit être l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$). Ainsi, le premier théorème d'isomorphisme donne une inclusion de $k(x)$ dans K. Réciproquement, on se donne un point $x \in X$ et une inclusion i de $k(x)$ dans K. On définit $f : \{0\} \longrightarrow X$ par $f(0) = x$. Pour $f^\sharp$, on définit $f^\sharp_X$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(X) &\longrightarrow \mathcal{O}_x \longrightarrow k(x) \longrightarrow K \\ s &\longmapsto s_x \longmapsto \pi(s_x) \longmapsto i\,\pi(s_x). \end{aligned}$$

On constate que l'application induite sur les germes $f_x^\sharp$ est $i\,\pi$ et que son noyau est M_x, ce qui implique que $f_x^\sharp$ est un homomorphisme d'anneaux locaux, et donc que le couple $(f, f^\sharp)$ est bien un morphisme de schémas. $\square$

Proposition 2.2.45
Soit $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux, $Y = \operatorname{Spec} S$, $X = \operatorname{Spec} R$, ainsi que $(f, f^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ l'application induite (voir proposition 2.2.26). Alors, φ est injectif si et seulement si $f^\sharp$ l'est. Si φ est injectif, alors $f(X)$ est dense dans Y.

Démonstration. Supposons que φ soit injective. On sait par la proposition 2.2.18 que $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}\big(D(f)\big) \cong R_f$. De plus, le fait que φ soit un homomorphisme implique que $f^{-1}\big(\mathcal{V}(\langle f\rangle)\big) = \mathcal{V}\big(\langle\varphi(f)\rangle\big)$, c'est-à-dire que $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\big(f^{-1}\big(D(f)\big)\big) \cong S_{\varphi(f)}$. L'application induite $\varphi_f : R_f \longrightarrow S_{\varphi f}$ envoie $\frac{a}{f^k}$ sur $\frac{\varphi(a)}{\varphi(f)^k}$. Ainsi, si $\frac{a}{f^k}$ est envoyé sur 0, cela implique qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 = \varphi(f)^m\varphi(a) = \varphi(f^m a)$. L'injectivité de φ implique $f^m a = 0$ et donc $\frac{a}{f^k} = 0$, ce qui entraîne l'injectivité de φ_f. Soit maintenant un ouvert V de $\operatorname{Spec} R$ et $f_V^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}\big(f^{-1}(V)\big)$. Si $s \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(V)$ est envoyé sur 0, on considère le recouvrement de V par des ouverts de base $D(f_i)$, $i \in I$. Pour tout i, on a :

$$0 = f_V^\sharp(s)\big|_{f^{-1}\left(D(f_i)\right)} = f_{D(f_i)}^\sharp\big(s\big|_{D(f_i)}\big) \Rightarrow s\big|_{D(f_i)} = 0.$$

La condition de localité implique que $s = 0$, et donc que $f_V^\sharp$ est injectif. Réciproquement, si $f^\sharp$ est injectif, alors $\varphi = f_{\operatorname{Spec} R}^\sharp$ est injectif.

Supposons que φ soit injectif. Le fait que $f(X)$ soit dense dans Y est équivalent au fait que $\varphi^{-1}(\operatorname{Spec} S)$ soit dense dans $\operatorname{Spec} R$. On va montrer que tout ouvert de base $D(g)$ non-vide admet une intersection non-vide avec $\varphi^{-1}(\operatorname{Spec} S)$. Supposons que $D(g) \neq \emptyset$ et que son intersection avec $\varphi^{-1}(\operatorname{Spec} S)$ soit vide, ce qui implique que $\varphi(g) \in Q$, pour tout $Q \in \operatorname{Spec} S$, c'est-à-dire que $\varphi(g)$ est nilpotent. Puisque φ est injectif, g est nilpotent et donc $D(g)$ est vide (proposition 2.2.11), contradiction. Ainsi, $f(X)$ est dense dans Y. $\square$

Proposition 2.2.46
Soit R un anneau commutatif, $X = \operatorname{Spec} R$ et $\mathcal{O}$ son faisceau structural ainsi que $f \in R$. Alors $\big(D(f), \mathcal{O}\big|_{D(f)}\big) \cong \big(\operatorname{Spec} R_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f}\big)$.

Démonstration. On considère l'application $\varphi : R \longrightarrow R_f$ qui envoie a sur $\frac{a}{1}$. La proposition 2.2.26 implique que cet homomorphisme d'anneaux induit un morphisme de schémas $(h, h^\sharp)$ de $\big(\operatorname{Spec} R_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f}\big)$ vers $(X, \mathcal{O})$. La proposition A.1.20 et le fait que $\mathfrak{p} \in D(f)$ si et seulement si $f \notin \mathfrak{p}$ impliquent que h est une bijection de $\operatorname{Spec} R_f$ dans $D(f)$. On considère alors l'application $g : \operatorname{Spec} R_f \longrightarrow D(f)$ qui est en fait un homéomorphisme (puisque $g(\mathcal{V}(IR_f)) = \mathcal{V}(I)$). L'application $h^\sharp$ induit un morphisme $g^\sharp : \mathcal{O}\big|_{D(f)} \longrightarrow g_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f}$ et l'on aimerait voir qu'il s'agit de l'isomorphisme désiré. On a, pour $\mathfrak{p} \in D(f)$:

$$\big(\mathcal{O}\big|_{D(f)}\big)_{\mathfrak{p}} \underset{2.1.29}{\cong} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \underset{2.2.18}{\cong} R_{\mathfrak{p}},$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\big(g_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_g}\big)_{\mathfrak{p}} &= \varinjlim_{\mathfrak{p}\in U} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f}\big(g^{-1}(U)\big) = \varinjlim_{g^{-1}(\mathfrak{p})\in V} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f}(V) \\ &= \big(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f}\big)_{g^{-1}(\mathfrak{p})} \underset{2.2.18}{\cong} (R_f)_{g^{-1}(\mathfrak{p})}\end{aligned}$$

On constate que l'application induite $g^\sharp_\mathfrak{p}$ est l'application canonique : $\frac{a}{b} \longmapsto \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{1}}$. Cette application est clairement injective et le fait que $f \notin \mathfrak{p}$ entraîne que $g^\sharp_\mathfrak{p}$ est surjective. En effet, si $\frac{\frac{a}{f^k}}{\frac{b}{f^m}} \in (R_f)_{g^{-1}(\mathfrak{p})}$ avec $k \leq m$, on a $g^\sharp_\mathfrak{p}\left(\frac{af^r}{n}\right) = \frac{\frac{a}{f^k}}{\frac{b}{f^m}}$ et l'autre cas se traite de manière similaire. Le fait que $g^\sharp_\mathfrak{p}$ soit un isomorphisme entraîne que $g^\sharp$ l'est aussi (proposition 2.1.18), comme désiré. □

Proposition 2.2.47
Soit $(X, \mathcal{O})$ un schéma et U un ouvert de X. Alors, $\left(U, \mathcal{O}\big|_U\right)$ est un schéma.

Démonstration. Soit $x \in U$. On doit montrer qu'il existe un voisinage ouvert W de X tel que $\left(W, \mathcal{O}\big|_U\big|_W\right)$ soit un schéma affine. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert V de x ainsi qu'un isomorphisme $(g, g^\sharp) : \left(V, \mathcal{O}\big|_V\right) \longrightarrow \left(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}\right)$. L'image de $U \cap V$ par g étant ouverte dans $\operatorname{Spec} R$ et les $D(f)$ formant une base de la topologie (proposition 2.2.10) de $\operatorname{Spec} R$, il existe $f \in R$ tel que $D(f) \subset g(U \cap V)$ et $x \in W = g^{-1}\big(D(f)\big)$. La proposition précédente nous assure de plus qu'il existe un isomorphisme $(k, k^\sharp)$ de $\left(D(f), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}\big|_{D(f)}\right)$ vers $\left(\operatorname{Spec} R_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_f}\right)$. En utilisant ces deux morphismes, on définit le morphisme $(h, h^\sharp)$ désiré et, à nouveau, on vérifie via les germes qu'il s'agit d'un isomorphisme. □

Définition 2.2.48 (Sous-schéma ouvert)
Un sous-schéma ouvert *d'un schéma $(X, \mathcal{O}_X)$ est un schéma $(U, \mathcal{O}_U)$ avec U un ouvert de X et tel que le schéma structural $\mathcal{O}_U$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X\big|_U$.*

Exemple 2.2.49
La proposition précédente implique que chaque ouvert U de X induit un sous-schéma ouvert de X.

Définition 2.2.50 (Immersion ouverte)
Une immersion ouverte *est un morphisme de schéma $(f, f^\sharp) : X \longrightarrow Y$ qui induit un isomorphisme entre X et un sous-schéma ouvert de Y.*

Proposition 2.2.51 (Caractérisation des immersions ouvertes)
Pour qu'un morphisme de schémas $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ soit une immersion ouverte, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert V de Y tel que $f : X \longrightarrow V$ soit un homéomorphisme et $f^\sharp_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_X(X, x)$ soit un isomorphisme pour tout $x \in X$.

Démonstration. Il est clair que ces deux conditions sont nécessaires. On suppose maintenant qu'elles sont satisfaites et que V est comme dans l'énoncé. Dans ce cas, l'application $f^\sharp$ et la propriété universelle du faisceau associé permettent de définir un morphisme $g^\sharp$ de $\mathcal{O}_Y\big|_V$ vers $f_*\mathcal{O}_X$. En trouve alors que chaque $g^\sharp_x$ est un isomorphisme, comme désiré. □

Lemme 2.2.52
Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux schémas. Pour donner un morphisme $(f, f^\sharp)$ de X vers Y, il suffit de donner un recouvrement ouvert U_i, $i \in I$, de X et une collection de morphismes $(f_i, f_i^\sharp) : \left(U_i, \mathcal{O}_X\big|_{U_i}\right) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ telle que f_i et f_j coïncident sur $U_i \cap U_j$[4].

4. On entend par là que $f_i\big|_{U_i \cap U_j} = f_j\big|_{U_i \cap U_j}$ et $f^\sharp_{i,V}(s)\big|_{U_i \cap U_j} = f^\sharp_{j,V}(s)\big|_{U_i \cap U_j}$ pour tout ouvert V de Y et tout $s \in \mathcal{O}_Y(V)$. Cette condition est équivalente à demander que les morphismes induits $f_i^\sharp, f_j^\sharp : \left(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X\big|_{U_i \cap U_j}\right) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ soient les mêmes.

Démonstration. On suppose donc que les U_i et f_i sont comme dans l'énoncé. Cela nous permet de définir une application continue $f : X \longrightarrow Y$. Pour un ouvert V de Y et $s \in \mathcal{O}_Y(V)$, on a les éléments $t_i := f_{i,V}^\sharp(s) \in f^{-1}(V) \cap U_i$. La condition de recollement sur $\mathcal{O}_X$ et le fait que les morphismes coïncident nous permettent de trouver $t \in \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(V)\big)$ tel que $t\big|_{U_i \cap f^{-1}(V)} = t_i$. On pose alors $f_V^\sharp(s) = t$. En utilisant la condition de localité, on remarque que $f_V^\sharp$ est bien un homomorphisme d'anneaux. En utilisant le fait que $f_V^\sharp(s)$ est inversible si et seulement si $f_{i,V}^\sharp(s)$ est inversible pour tout i et le fait que les $f_{i,x}^\sharp$ sont des homomorphismes locaux, on obtient que $f_x^\sharp$ est un homomorphisme local, comme désiré. □

Théorème 2.2.53
Soient R et S deux anneaux. Alors, il existe une bijection

$$\alpha : \hom_{\mathfrak{Sch}}(\operatorname{Spec} R, \operatorname{Spec} S) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Rng}}\big(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(\operatorname{Spec} S), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R)\big).$$

Démonstration. Pour alléger les notations, on pose $X = \operatorname{Spec} R$ et $Y = \operatorname{Spec} S$. Pour $(f, f^\sharp) \in \hom_{\mathfrak{Sch}}(X, Y)$, on pose $\alpha(f, f^\sharp) = f_Y^\sharp$. Si $\varphi \in \hom_{\mathbf{Rng}}\big(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)\big)$, on utilise l'identification habituelle $\mathcal{O}_X(X) \cong R$ et $\mathcal{O}_Y(Y) \cong S$ et la proposition 2.2.26 afin d'obtenir un morphisme $\beta(\varphi) : X \longrightarrow Y$.

On considère donc $(f, f^\sharp) \in \hom_{\mathfrak{Sch}}(\operatorname{Spec} R, \operatorname{Spec} S)$, $\varphi = \alpha(f, f^\sharp)$ et $\beta(\varphi)$. La manière dont $\beta(\varphi)$ est construit implique que $\beta(\varphi) = f$. En faisant comme dans la preuve de la proposition 2.2.26, on remarque que $\beta(\varphi)_{\mathfrak{q}}^\sharp = \varphi_{\mathfrak{p}} = f_{\mathfrak{p}}^\sharp$. La proposition 2.1.19 implique alors que $\beta(\varphi)^\sharp = f^\sharp$, ce qui entraîne l'injectivité de α. La surjectivité provient directement de la propriété (*iii*) de la proposition 2.2.26. □

Remarque 2.2.54
Le théorème ci-dessus exprime le fait qu'il existe une équivalence (contravariante) de catégories entre celle des schémas affines et celle des anneaux.

Proposition 2.2.55
Soit R un anneau et $(X, \mathcal{O}_X)$ un schéma. Il existe une bijection naturelle

$$\rho : \hom_{\mathfrak{Sch}}(X, \operatorname{Spec} R) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Rng}}\big(R, \mathcal{O}_X(X)\big).$$

Démonstration. L'application ρ est construite de manière évidente : un morphisme $(f, f^\sharp)$ est envoyé sur $f_{\operatorname{Spec} R}^\sharp$. Pour un recouvrement d'ouverts affines U_i, $i \in I$, de X on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathfrak{Sch}}(X, \operatorname{Spec} R) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \hom_{\mathbf{Rng}}\big(R, \mathcal{O}_X(X)\big) \arrow[d] \\
\prod_{i\in I} \hom_{\mathfrak{Sch}}\left(U_i, \operatorname{Spec} R\right) \arrow[r, "\alpha"'] & \prod_{i \in I} \hom_{\mathbf{Rng}}\big(R, \mathcal{O}_X\big|_{U_i}(U_i)\big),
\end{tikzcd}$$

où l'application α est construite comme ci-dessus. En utilisant le fait que $\big(\mathcal{O}_X\big|_{U_i}\big)(U_i)$ s'identifie avec les applications de U_i dans $\bigcup_{y \in U_i} \mathcal{O}_{X,y}$ qui satisfont les deux propriétés demandées dans la construction du faisceau associé et que l'application de $\mathcal{O}_X(U_i)$ dans $\varinjlim_{U_i \subset V} \mathcal{O}_X(V)$ est surjective (puisque U_i est ouvert), on montre que $\mathcal{O}_X(U_i)$ est isomorphe à $\big(\mathcal{O}_X\big|_{U_i}\big)(U_i)$, ce qui entraîne que l'homomorphisme vertical de droite s'obtient via composition avec les restriction $\rho_{U_i}^X$. Le morphisme vertical de gauche est induit par les restrictions de morphismes et, puisqu'il est injectif et que l'application α est injective par le théorème ci-dessus, ρ est injectif.

Réciproquement, on considère un homomorphisme $\varphi : R \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$. Si l'on fixe un ouvert affine $U \subset X$, on a l'existence d'un anneau R_U tel que

$$\left(U, \mathcal{O}_X\big|_U\right) \xrightarrow[\cong]{(f^U, f^{U,\sharp})} \left(\operatorname{Spec} R_U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_U}\right)$$

On a alors :

$$R \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\rho_U^X} \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\cong} \left(\mathcal{O}_X\big|_U\right)(U_X) \xrightarrow{\cong} R_U,$$

qui donne lieu à un morphisme de schémas affines $(g^U, g^{U,\sharp})$ de $\left(\operatorname{Spec} R_U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_U}\right)$ dans $\left(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}\right)$. On doit vérifier la compatibilité de ces différents morphismes afin de pouvoir les recoller en un morphisme global. On considère alors $W = U \cap V$ et l'on a :

$$g_U\big|_W = \operatorname{Spec}(\rho_U^X\, \varphi) \circ \operatorname{Spec}(\rho_W^U);$$

on utilise ici le fait que les applications entre $\operatorname{Spec}(R_U \cap R_V)$ (qui est, rigoureusement, l'image par les isomorphismes f^U et f^V de $U \cap V$ dans $\operatorname{Spec} R_U$) et $\operatorname{Spec}(R_U)$ sont induites par les applications de restriction. On a alors :

$$g_U\big|_W = \operatorname{Spec}(\rho_U^X\, \varphi) \circ \operatorname{Spec}(\rho_W^U) = \operatorname{Spec}(\rho_W^U\, \rho_U^X\, \varphi) = \operatorname{Spec}(\rho_W^X\, \varphi),$$

ce qui entraîne $g_U\big|_W = g_V\big|_W$, comme désiré. En utilisant à nouveau la transitivité des applications de restriction et les isomorphismes f^U, on remarque que la condition de compatibilité pour les applications $f^{U,\sharp}$ et $g^{U,\sharp}$ est vérifiée. En utilisant le lemme 2.2.52, on obtient un morphisme schémas $(f, f^\sharp)$ de X vers $\operatorname{Spec} R$. Il est encore nécessaire de voir que $\alpha(f, f^\sharp) = \varphi$, c'est-à-dire qu'avec l'identification $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R) \cong R$ on ait $f^\sharp_{\operatorname{Spec} R} = \varphi$. L'application $f^\sharp$ a été définie à partir d'une collection d'applications $\varphi^U : R \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$; on constate alors que la condition de recollement sur $\mathcal{O}_X$ nous donne un élément t à partir des $\varphi^U(s)$ qui n'est autre que $\varphi(s)$. $\square$

Corollaire 2.2.56
Le schéma $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ *est un objet final de la catégorie des schémas.*

2.2.6 Liens avec la géométrie classique

Définition 2.2.57 (S-schéma)
Soit S un schéma. Un S-schéma *est la donnée d'un schéma X et d'un morphisme $X \longrightarrow S$.*

Définition 2.2.58 (Morphisme de S-schémas)
Soient X et X' deux S-schémas. Un morphisme de S-schémas *est un morphisme $f : X \longrightarrow X'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Remarque 2.2.59
Si l'on prend $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, cette définition coïncide avec celle des morphismes entre les schémas X et X'. En effet, si $s_X : X \longrightarrow S$, $s_{X'} : X' \longrightarrow S$ et $f : X \longrightarrow X'$ sont des morphismes, le fait que $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ soit terminal implique $s_{X'} f = s_X$.

Notation 2.2.60
Soit S un schéma. La catégorie ayant pour objets les schémas sur S et comme morphisme les S-morphismes est notée $\mathfrak{Sch}(S)$. Pour un anneau R, on note parfois par abus de notation $\mathfrak{Sch}(R)$ à la place de $\mathfrak{Sch}(\operatorname{Spec} R)$.

Remarque 2.2.61
Si X est un S-schéma et si $g : X' \longrightarrow X$ est un morphisme de schémas, alors X' devient S-schéma.

L'intérêt d'introduire les faisceaux puis les schémas était de généraliser la notion de variété. Bien qu'il n'est pas forcément possible d'identifier une variété avec l'espace topologique sous-jacent d'un schéma (on a vu dans les exemples 2.2.34 et 2.2.35 de la page 47 qu'il existe un certain nombre de points non-fermés en plus). Le théorème qui suit précise la généralisation.

Remarque 2.2.62
Soit X un espace topologique et $Y \subset X$ un fermé irréductible. Si F est un fermé de X contenant Y, alors Y est irréductible par rapport à la topologie induite dans F. Cette remarque est utilisée plusieurs fois dans la preuve du théorème sans mention explicite.

Lemme 2.2.63
Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ une variété affine, $a \in Y$ et M_a l'idéal maximal $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle / \mathcal{A}(Y)$ de $\Gamma(Y) = K[x_1, \ldots, x_n] / \mathcal{A}(Y)$. On a alors

$$\Gamma(Y)_{M_a} / M_a \, \Gamma(Y)_{M_a} \cong K,$$

où $M_a \, \Gamma(Y)_{M_a}$ désigne l'image de M_a par l'injection $i : \Gamma(Y) \longrightarrow \Gamma(Y)_{M_a}$.

Démonstration. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma(Y)_{M_a} &\longrightarrow K \\ \frac{f(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{A}(Y)}{g(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{A}(Y)} &\longmapsto \frac{f(a)}{g(a)}. \end{aligned}$$

Pour commencer, puisque $g \notin M_a$, $g(a) \neq 0$. De plus, puisque $a \in A$, le résultat ne dépend pas des représentants de $f(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{A}(Y)$ et de $g(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{A}(Y)$. Supposons maintenant que $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \sim \frac{\overline{f'}}{\overline{g'}}$, c'est-à-dire qu'il existe $\overline{h} \in \Gamma(Y) \setminus M_a$ tel que

$$\overline{h}\big(\overline{f} \cdot \overline{g'} - \overline{f'} \cdot \overline{g}\big) = 0 \Rightarrow h(f \cdot g' - f'(a) \cdot g(a)\big) \in \mathcal{A}(Y).$$

Puisque $h(a) \neq 0$, on trouve $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$, comme désiré. Ainsi, l'application φ est bien définie. Il est clair qu'il s'agit d'un homomorphisme d'anneaux surjectif. On a de plus :

$$\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in \ker \varphi \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow \overline{f} \in M_a \Leftrightarrow \frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in i(M_a),$$

comme désiré. $\square$

Théorème 2.2.64
Soit K un corps algébriquement clos. Il existe un functor pleinement fidèle de la catégorie des variétés sur K dans la catégorie des $\operatorname{Spec} K$*-schémas* $t : \mathbf{V}^K \longrightarrow \mathfrak{Sch}(K)$. *Pour toute variété V, son espace topologique est homéomorphe à l'ensemble des points fermés (muni de la topologie induite) de* $\operatorname{sp}\big(t(V)\big)$. *De plus, son faisceau des applications régulières est obtenu en restreignant le faisceau structural de $t(V)$ via l'homéomorphisme mentionné.*

Preuve du théorème. On va considérer une variété algébrique Y et $\mathcal{O}$ son faisceau des applications régulières. Les différentes étapes de la preuve sont les suivantes :

- Construction du foncteur t qui associe à tout espace topologique X l'espace topologique $t(X)$ constitué des parties fermées et irréductibles de X.
- Réduction au cas où Y est affine.
- Définition d'une application $\alpha : X \longrightarrow t(X)$, pour tout espace topologique X.
- Construction d'un morphisme $(\beta, \beta^\sharp) : (Y, \mathcal{O}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$, où $X = \operatorname{Spec}\Gamma(Y)$ avec $\Gamma(Y) = K[x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{A}(Y)$.
- Montrer que $(X, \mathcal{O}_X) \cong (t(Y), \alpha_* Y)$ pour voir que $(t(Y), \alpha_* Y)$ est un schéma affine.
- Montrer que $(t(Y), \alpha_* Y)$ est un K-schéma.
- Vérifier que le foncteur t est pleinement fidèle.

On commence par définir une application $t : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$ de la manière suivante :

$$t(X) = \big\{Y \subset X : Y \text{ fermé et irréductible}\big\}, \quad \forall X \in \mathbf{Top}.$$

On remarque que si Y est fermé dans X, alors $t(Y) \subset t(X)$. On fixe maintenant un espace topologique X ainsi que Y_1, Y_2 et $\{Y_i\}_{i\in I}$ des fermés de X. On a les deux propriétés suivantes :

$$t\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) = \bigcap_{i\in I} t(Y_i), \quad t\big(Y_1 \cup Y_2\big) = t(Y_1) \cup t(Y_2).$$

On ne prouve que la première propriété, l'autre se réalisant de manière analogue. Si $Y \in t\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right)$, alors $Y \in t(Y_i)$, pour chaque $i \in I$, puisque t est croissante. Réciproquement, si $Y \in \bigcap_{i\in I} t(Y_i)$, alors il existe une famille de fermés F_i telle que $Y = Y_i \cap F_i$ pour chaque $i \in I$. On a alors

$$Y = \bigcap_{i\in I} Y = \bigcap_{i\in I} (F_i \cap Y_i) = \bigcap_{i\in I} Y_i \cap \bigcap_{i\in Y_i} F_i,$$

et Y est fermé dans $\bigcap_{i\in I} Y_i$. Grâce aux deux propriétés ci-dessus et au fait que les espaces irréductibles sont non-vides par définition, on peut définir une topologie sur $t(X)$ de la manière suivante : un sous-ensemble S de $t(X)$ est fermé si et seulement s'il existe un fermé Y de X tel que $S = t(Y)$. Si $f : X_1 \longrightarrow X_2$ est une application continue, on peut définir une application :

$$\begin{aligned} t(f) : t(X) &\longrightarrow t(Y) \\ Y_1 &\longmapsto \overline{f(Y_1)} \end{aligned}$$

On vérifie que cette application est bien définie : soient $U_1 \cap f(Y_1), U_2 \cap f(Y_1)$ deux ouverts non-vides de $f(Y_1)$. Alors, $f^{-1}(U_1) \cap Y_1$ et $f^{-1}(U_2) \cap Y_1$ sont deux ouverts non-vides de Y_1 qui doivent avoir une intersection non-vide (puisque Y_1 est irréductible).

Soit x un élément de cette intersection. Alors, $f(x) \in \big(U_1 \cap f(Y_1)\big) \cap \big(U_2 \cap f(Y_1)\big)$, ce qui implique que $f(Y_1)$ est irréductible et donc $t(f)(Y_1)$ aussi, par la proposition 1.1.15. En fait, on peut voir que $t(f)^{-1}\big(t(F_2)\big) = t\big(f^{-1}(F_2)\big)$, ce qui implique que $t(f)$ est continue. En utilisant la proposition A.4.1, on montre que t est un foncteur de **Top** dans **Top**.
On peut définir l'application suivante :

$$\begin{aligned} \alpha : X &\longrightarrow t(X) \\ x &\longrightarrow \overline{\{x\}}, \end{aligned}$$

qui est bien définie, par la proposition 1.1.15. Si F est un sous-ensemble fermé de X, on a $\alpha^{-1}\big(t(F)\big) = F$. Cette égalité implique que α est continue et induit une bijection entre les ouverts de X et ceux de $t(X)$.

On considère maintenant une variété Y sur K. Puisque chaque variété possède une base d'ouverts affines (proposition 1.2.32), on peut supposer que Y est affine. On considère le faisceau d'anneaux des applications régulières $\mathcal{O}$ sur Y et l'on aimerait montrer que $\big(t(Y), \alpha_*\mathcal{O}\big)$ est un schéma sur K. On rappelle que $\Gamma(Y)$ est l'anneau de coordonnées affines de Y, c'est-à-dire $\Gamma(Y) = K[x_1, \dots, n]/_{\mathcal{A}(Y)}$, si $Y \subset \mathbb{A}^n$. Si on note $X = \operatorname{Spec}\Gamma(Y)$, on peut considérer le schéma $(X, \mathcal{O}_X)$. On pose alors :

$$\begin{aligned} \beta : Y &\longrightarrow X \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto M_a := \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\rangle/_{\mathcal{A}(Y)}. \end{aligned}$$

Puisque $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\rangle$ est un idéal premier de $K[x_1, \dots, x_n]$, l'application β est bien définie. Le point (ii) du théorème 1.2.28 implique que β est une bijection entre Y et les points fermés de X. Si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des points fermés de X on trouve, comme dans l'exemple 2.2.35, que

$$\beta\big(\mathcal{V}_{aff}(I) \cap Y\big) = \mathcal{V}\left(\big(I \cap \mathcal{A}(Y)\big)/_{\mathcal{A}(Y)}\right) \cap \mathcal{S},$$

pour tout idéal I de $K[x_1, \dots, x_n]$. Ainsi, β est un homéomorphisme sur son image. On veut définir un morphisme $\beta^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow \beta_*\mathcal{O}$. Pour cela, on considère un ouvert U de X et $s \in \mathcal{O}_X(U)$. Alors, on a :

$$\begin{array}{ccccccc} \beta^{-1}(U) & \xrightarrow{\ \beta\ } & U & \xrightarrow{\ s\ } & \coprod_{\mathfrak{p}\in U} \Gamma(Y)_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & K \\ a & \longmapsto & \beta(a) & \longmapsto & s\big(\beta(a)\big) = \frac{\overline{f}}{\overline{g}} & \longmapsto & \frac{f(a)}{g(a)}, \end{array}$$

où φ est l'isomorphisme considéré dans le lemme 2.2.63 (puisque $s(M_a) \in \Gamma(Y)_{M_a}$). Pour voir qu'il s'agit bien d'une application régulière, on fixe $a \in \beta^{-1}(U)$. Puisque $s \in \mathcal{O}_X(U)$, il existe un voisinage ouvert V de $\beta(a)$ contenu dans U et $\overline{f}, \overline{g}$ tels que $s(\mathfrak{p}) = \frac{\overline{f}}{\overline{g}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in V$. Ainsi, si on pose $W = \beta^{-1}(V)$, on a $\beta^\sharp_U(b) = \frac{f(b)}{g(b)}$ pour tout $b \in W$. Ainsi, en posant $\beta^\sharp_U(s) = \varphi\, s\, \beta$, on obtient un homomorphisme d'anneaux de $\mathcal{O}_X(U)$ dans $\beta_*\mathcal{O}(U)$ qui induit un isomorphisme $\mathcal{O}_X(U) \cong \mathcal{O}\big(\beta^{-1}(U)\big)$. On définit une application continue

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow t(V) \\ \mathfrak{p}/_{\mathcal{A}(Y)} &\longmapsto \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

qui est une bijection, par la proposition 1.1.35. On vérifie alors qu'il s'agit d'un homéomorphisme. Les isomorphismes induits $\mathcal{O}_X(U) \cong \mathcal{O}\big(\beta^{-1}(U)\big)$ permettent de définit un isomorphisme $f^\sharp : \alpha_*\mathcal{O} \longrightarrow f_*\alpha_*\mathcal{O}_X$, ce qui implique que $\big(X, \mathcal{O}_X\big) \cong \big(t(Y), \alpha_*\mathcal{O}\big)$, comme désiré.

On aimerait définir un morphisme $(g, g^\sharp) : \big(t(Y), \alpha_*\mathcal{O}\big) \longrightarrow \big(\operatorname{Spec} K, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}\big)$ afin de montrer qu'il s'agit d'un K-schéma. On a vu dans l'exemple 2.2.31 que $\big(\operatorname{Spec} K, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}\big) \cong (0, K)$, ce qui implique qu'il suffit de définir un morphisme

$$g^\sharp : K \longrightarrow \big(\alpha_*\mathcal{O}\big)\big(t(Y)\big) = \mathcal{O}(Y),$$

en plus de l'application triviale $g : t(Y) \longrightarrow \{0\}$. On pose alors $g^\sharp(k)$ comme étant l'application qui envoie tout élément de $\mathcal{O}(Y)$ sur k. Le fait que le foncteur t soit pleinement fidèle est l'objet de la proposition 2.2.66. $\square$

Proposition 2.2.65
Soit $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme de K-schémas. Si $x \in X$ est tel que le corps résiduel $k(x)$ est K, alors le corps résiduel $k(f(x))$ est aussi K.

Démonstration. On note M_x, respectivement $M_{f(x)}$, l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, respectivement $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$. Pour commencer, on constate que le morphisme $f_x^\sharp$ induit un morphisme sur les corps résiduels :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y,f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(f(x)) & \xrightarrow{\varphi} & k(x), \end{array}$$

où φ est l'application qui envoie $t_{f(x)} + M_{f(x)}$ sur $f_x^\sharp\big(t_{f(x)}\big) + M_x$. L'application φ est bien définie puisque $f_x^\sharp$ est un homomorphisme d'anneaux locaux. On utilise les morphismes $(g, g^\sharp)$ et $(h, h^\sharp)$ de X et Y vers $(0, K)$ et, puisque le corps résiduel en 0 est K, on obtient que $K \hookrightarrow k(f(x)) \hookrightarrow k(x) = K$, ce qui entraîne que $k(f(x)) = K$, comme désiré. $\square$

Proposition 2.2.66
Soient V et W deux variétés sur un corps K (algébriquement clos). Alors il existe une bijection naturelle

$$\Phi : \hom_{\mathbf{V}^K}(V, W) \longrightarrow \hom_{\mathfrak{Sch}(K)}\big(t(V), t(W)\big).$$

Démonstration. On réutilise les applications $\alpha_V : V \longrightarrow t(V)$ et $\alpha_W : W \longrightarrow t(W)$ qui envoie un point sur son adhérence, comme ci-dessus. On considère maintenant $\varphi : V \longrightarrow W$ un morphisme de variétés. On définit une application $f : t(V) \longrightarrow t(W)$ comme dans le théorème ci-dessus, c'est-à-dire que V_1 est envoyé sur $\overline{\varphi(V_1)}$. On doit maintenant définir un morphisme

$$f^\sharp : \alpha_{W,*}\,\mathcal{O}_W \longrightarrow f_*\,\alpha_{V,*}\,\mathcal{O}_V.$$

On le fait de la manière naturelle suivante : si Z est un ouvert de $t(W)$, on pose :

$$\begin{aligned} f_Z^\sharp : \mathcal{O}_W\big(\alpha_W^{-1}(Z)\big) &\longrightarrow \mathcal{O}_V\big(\alpha_V^{-1}\, f^{-1}(Z)\big) \\ \psi &\longmapsto g\varphi\big|_{\varphi^{-1}\,\alpha_V^{-1}\,f^{-1}(Z)}. \end{aligned}$$

Avec cette définition, l'injectivité de Φ est claire. Pour la surjectivité, c'est un peu plus compliqué et je ne le ferai pas ici. $\square$

2.2.7 Perspective

Le théorème précédent montre que les schémas généralisent les variétés algébriques présentées au premier semestre. La question qui se pose alors est de savoir si cette généralisation est stricte, c'est-à-dire si on obtient réellement quelque chose de nouveau. Un élément de réponse est apporté avec l'introduction du produit fibré de deux S-schémas (pour la définition et l'existence, voir $II.3$ de [Har77]) : le produit de deux K-schémas liés à des variétés algébriques peut ne pas être une variété algébrique (à cause de la présence d'éléments nilpotents), comme le présente l'exemple 3.3.1 du chapitre II de [Har77].

Annexe A

Résultats classiques

A.1 Anneaux

Définition A.1.1 (Anneau nœtherien)
Un anneau est dit nœtherien *si tout chaîne d'idéaux* $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ *se stabilise.*

Proposition A.1.2
Soit R *un anneau. On a les équivalences suivantes :*

(i) *R est nœtherien.*

(ii) *Toute collection non-vide d'idéaux de R possède un élément maximal.*

(iii) *Tout idéal est de génération finie.*

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $\mathcal{S}$ une collection non-vide d'idéaux de R. Par l'absurde, supposons qu'elle ne possède pas d'élément maximal. Cela signifie que pour tout élément I de $\mathcal{S}$ on peut trouver un idéal $I' \in \mathcal{S}$ tel que $I \subsetneq I'$. L'axiome du choix dépendant nous assure qu'il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $I_n \subsetneq I_{n+1}$ pour tout n, contredisant le fait que R est nœtherien.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Évident.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Soit $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ une suite d'idéaux de R et posons $I = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$. Par hypothèse, il existe $r_1, \ldots, r_n \in R$ tels que $I = \langle r_1, \ldots, r_n \rangle$. Si $N \in \mathbb{N}$ est tel que $r_1, \ldots, r_n \in I_N$, alors la suite se stabilise en I_N.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soit $I \subset R$ un idéal et

$$\mathcal{S} = \left\{ J \subset I : J \text{ est un idéal de génération finie} \right\}$$

qui n'est pas vide. Par hypothèse, $\mathcal{S}$ contient un élément maximal M. Si $M \neq I$, on choisit un élément $m \in I \setminus M$ et on obtient un idéal $M + mR$ qui ne peut être de génération finie (car M est strictement inclus dans $M + mR$), contradiction. □

Théorème A.1.3 (Théorème de la base de Hilbert)
Soit R un anneau commutatif unitaire. Si R est nœtherien, alors $R[x]$ est nœtherien.

Démonstration. Voir corollaire 11.3 du chapitre III de [Gri07]. □

Corollaire A.1.4
Soit K un corps. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K[x_1, \ldots, x_n]$ est nœtherien.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. L'anneau $K[x]$ est nœtherien (en tant qu'anneau principal, par la proposition A.1.2). Le théorème précédent permet la récurrence. $\square$

Définition A.1.5 (Radical d'un idéal et idéal radical)
Soit I un idéal d'un anneau commutatif R.

(i) *Le* radical *de I, noté $\sqrt{I}$, est l'intersection des idéaux premiers contenant I (s'il n'existe pas d'idéaux premiers contenant I, par exemple si R n'est pas unitaire, alors $\sqrt{I} = R$).*

(ii) *I est dit* radical *si $I = \sqrt{I}$.*

Proposition A.1.6
Soit R un anneau commutatif et I un idéal de R. Alors

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, r^n \in I\}.$$

En particulier, $\sqrt{\{0\}}$ est l'ensemble des éléments nilpotents de R.

A.1.1 Eléments nilpotents

Définition A.1.7 (Anneau réduit)
Un anneau est dit réduit *s'il ne possède pas d'éléments nilpotents non-nuls.*

Définition A.1.8 (Nilradical)
Le nilradical *d'un anneau R est l'ensemble des éléments nilpotents de R.*

Remarque A.1.9
Dans un anneau commutatif, le binôme de Newton implique qu'il s'agit d'un idéal.

Proposition A.1.10
Soit R un anneau commutatif et I son nilradical. Alors $R/_I$ est réduit.

Démonstration. Soient $r + I \in R/_I$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $(r + I)^n = 0$, c'est-à-dire $r^n \in I$. Ainsi, r est nilpotent et $r + I = 0$. $\square$

Notation A.1.11
Soit R un anneau commutatif. On note R_{red} l'anneau réduit $R/_I$, où est I l'ensemble des éléments nilpotents de R.

A.1.2 Localisations

Dans cette section, un anneau désigne un anneau commutatif unitaire.

Définition A.1.12 (Ensemble multiplicatif)
Soit R un anneau. Un sous-ensemble $S \subset R$ est dit multiplicatif *si pour tous $s, s' \in S$, on a $ss' \in S$.*

Soit $S \subset R$ un ensemble multiplicatif. On définit une relation sur $R \times S$:

$$(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow \exists s_0 \in S \text{ tel que } (rs' - sr')s_0 = 0.$$

On montre qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Notation A.1.13
On écrit $\frac{r}{s}$ pour la classe d'équivalence de (r, s). L'ensemble des classes d'équivalence se note $S^{-1}R$.

Définition A.1.14 (Localisation)
L'ensemble $S^{-1}R$ *défini ci-dessus s'appelle* localisation *de* R *par rapport à* S.

Proposition A.1.15
Soit $S \subset R$ *un ensemble multiplicatif.* $S^{-1}R$ *est un anneau commutatif unitaire pour les opérations définies par*

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + r's}{ss'}, \quad \frac{r}{s}\frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}, \quad \forall r, r' \in R, \forall s, s' \in S.$$

Notation A.1.16
Soit R un anneau, P un idéal premier et $S = R \setminus P$. Dans ce cas, on écrit R_P pour $S^{-1}R$.

Proposition A.1.17
R_P *est un anneau local.*

Démonstration. Voir proposition 4.8, chapitre VII, de [Gri07]. □

Proposition A.1.18
Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ *un homomorphisme d'anneaux et* P *un idéal premier de* B. *Alors* φ *s'étend en un homomorphisme* $\varphi_P : A_{\varphi^{-1}(P)} \longrightarrow B_P$ *(ce qui a un sens, puisque la pré-image d'un idéal premier par un homomorphisme d'anneaux est un idéal premier).*

Démonstration. Soit $\frac{a}{q}$ un élément de $A_{\varphi^{-1}(P)}$. On pose $\varphi_P\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(q)}$, qui est est un homomorphisme d'anneaux bien défini. □

Proposition A.1.19
Soit R *un anneau,* I *un idéal de* R, P *un idéal premier de* R *contenant* I *ainsi que* $i : R \longrightarrow R_P$ *l'application envoyant* r *sur* $\frac{r}{1}$. *Alors on a*

$$R_P/_{I\,R_P} \cong (R/_I)_{P/I}\,,$$

où $I\,R_P$ *désigne l'idéal engendré par* I *dans* R_P.

Proposition A.1.20
Soit R *un anneau commutatif et* S *une partie multiplicative propre de* R. *L'application canonique* $\varphi_S : R \longrightarrow S^{-1}R$ *induit une correspondance bijective entre les idéaux premiers de* $S^{-1}R$ *et les idéaux premiers de* R *disjoints de* S.

Démonstration. Voir proposition 4.5 du chapitre VII de [Gri07]. □

A.2 Anneaux gradués

Définition A.2.1 (Anneau gradué)
Un anneau gradué *est un anneau* R *qui se décompose en une somme directe de sous-groupes abéliens*

$$R = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} R_d.$$

On demande de plus à ce que pour tous $d, e \in \mathbb{N}_0$ *on ait* $R_d R_e \subset R_{d+e}$.

Définition A.2.2 (Élément homogène)
Dans la définition ci-dessus, un élément de R_d *s'appelle* élément homogène de degré d.

Proposition A.2.3
Soit R un anneau gradué et I un idéal de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $I = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} (R_d \cap I)$.

(*ii*) *Il existe un ensemble générateur pour I constitué d'éléments homogènes.*

Définition A.2.4 (Idéal homogène)
Un idéal d'un anneau gradué satisfaisant les deux conditions ci-dessus est appelé idéal homogène.

Proposition A.2.5
Soient I et J deux idéaux homogènes d'un anneau gradué R. Alors : $I+J$, $I \cap J$ et IJ sont des idéaux homogènes.

Proposition A.2.6
Soit I un idéal homogène d'un anneau gradué R. Pour vérifier que I est premier, il suffit de vérifier que

$$ab \in I \Rightarrow a \in I \text{ ou } b \in I$$

pour tout couple d'éléments homogènes $a, b \in R$.

Démonstration. Soit I un idéal satisfaisant la propriété pour les éléments homogènes ainsi que $x, y \in R$ des éléments tels que $xy \in I$. On écrit la décomposition en éléments homogènes de x et de y :

$$x = x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_k}, \quad y = y_{\beta_1} + \ldots + y_{\beta_l}.$$

Parmis les $k+l$ éléments homogènes, on en choisi un qui ne fasse pas partie de I (si cela n'est pas possible, x et y sont dans I). Sans perte de généralité, on peut supposer que $y_{\beta_1} \notin I$. En effectuant le produit de xy, on trouve que $x_{\alpha_1} y_{\beta_1} \in I$ (puisque I est homogène) et notre hypothèse implique que $x_{\alpha_1} \in I$. On considère maintenant le premier facteur du produit $(x - x_{\alpha_1})y$, qui est $x_{\alpha_2} y_{\beta_1}$, et on trouve $x_{\alpha_2} \in I$. En itérant le processus on obtient $x \in I$, comme désiré. □

Proposition A.2.7
Si I est un idéal homogène, alors $\sqrt{I}$ est homogène.

Démonstration. Soit $x \in \sqrt{I}$, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in I$ (voir proposition A.1.6). Soit y l'élément homogène de plus haut degré dans la décomposition de x, c'est-à-dire y^n est l'élément homogène de plus haut degré de x^n. Puisque $y^n \in I$, on a $y \in \sqrt{I}$. On recommence ce procédé avec $x - y$ afin de montrer que toutes ses composantes homogènes sont dans $\sqrt{I}$. □

Exemple A.2.8 (Le cas des polynômes)
On aimerait voir $K[x_1, \ldots, x_n]$ comme un anneau gradué. Pour cela, on définit

$$R_d = \Big\{ \sum_{i=0}^{r} a_i \cdot x_1^{\alpha_{i,1}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_{i,n}} : \alpha_{i,1} + \ldots + \alpha_{i,n} = d, a_i \in K, \forall i = 0, \ldots, r \Big\}.$$

A.3 Limites directes et projectives

Définition A.3.1 (Ensemble ordonné filtrant)
Un ensemble $(I, \leq)$ *est dit* ensemble ordonné filtrant *si* $(I, \leq)$ *est un ensemble partiellement ordonné et si pour tous* $i, j \in I$, *il existe* $k \in I$ *tel que* $i \leq k$ *et* $j \leq k$.

Définition A.3.2 (Système projectif)
Soient I *un ensemble ordonné filtrant. Un* système projectif *sur* I *est la donnée d'une famille d'objets* $(X_i)_{i \in I}$ *d'une catégorie* $\mathscr{C}$ *et, pour chaque couple* $(i, j) \in I^2$ *tel que* $i \leq j$, *d'un morphisme* $\varphi_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$. *Ces morphismes doivent vérifier les propriétés suivantes :*

(*i*) $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$ *pour tout* $i \in I$;

(*ii*) *pour tous* $i, j, k \in I$ *tels que* $i \leq j \leq k$, $\varphi_{ij}\, \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$.

Un tel système est noté (X_i, φ_{ij}).

Définition A.3.3 (Morphismes compatibles)
Soit (X_i, φ_{ij}) *un système projectif dans une catégorie* $\mathscr{C}$, $X \in |\mathscr{C}|$ *et une famille de morphismes* $\varphi_i : X \longrightarrow X_i$. *La famille* $(\varphi_i)_{i \in I}$ *est dite* compatible *avec le système* (X_i, φ_{ij}) *si pour tous* $i, j \in I$ *avec* $i \leq j$, *on a* $\varphi_{ij}\varphi_j = \varphi_i$.

Définition A.3.4 (Limite projective)
Soit (X_i, φ_{ij}) *un système projectif dans une catégorie* $\mathscr{C}$. *Une* limite projective (X, φ_i) *du système est la donnée d'un couple* $(X,\ \varphi_i)$, *où* $X \in |\mathscr{C}|$ *et les* φ_i *forment une famille de morphismes compatibles. Ce couple doit satisfaire la condition suivante : si* $\psi_i : Y \longrightarrow X_i$, $Y \in |\mathscr{C}|$, *est une autre famille de morphismes compatibles, alors il existe un unique morphisme* $\psi : Y \longrightarrow X$ *tel que le diagramme suivant commute pour tous* $i \leq j$ *:*

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, dotted, "\psi"] \arrow[ddl, bend right, "\psi_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi_j"] & \\
& X \arrow[dl, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \\
X_i & & X_j \arrow[ll, "\varphi_{ij}"]
\end{tikzcd}$$

Définition A.3.5 (Système inductif)
Soient I *un ensemble ordonné filtrant. Un* système inductif *sur* I *est la donnée d'une famille d'objets* $(X_i)_{i \in I}$ *d'une catégorie* $\mathscr{C}$ *et, pour chaque couple* $(i, j) \in I^2$ *tel que* $i \leq j$, *d'un morphisme* $\varphi_{ij} : X_i \longrightarrow X_j$. *Ces morphismes doivent vérifier les propriétés suivantes :*

(*i*) $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$ *pour tout* $i \in I$;

(*ii*) *pour tous* $i, j, k \in I$ *tels que* $i \leq j \leq k$, $\varphi_{jk}\, \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$.

Un tel système est noté (X_i, φ_{ij}).

Définition A.3.6 (Morphismes compatibles)
Soit (X_i, φ_{ij}) *un système inductif dans une catégorie* $\mathscr{C}$, $X \in |\mathscr{C}|$ *et une famille de*

morphismes $\varphi_i : X_i \longrightarrow X$. La famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ est dite compatible *avec le système (X_i, φ_{ij}) si pour tous $i, j \in I$ avec $i \leq j$, on a $\varphi_j \varphi_{ij} = \varphi_i$.*

Définition A.3.7 (Limite inductive)
Soit (X_i, φ_{ij}) un système inductif dans une catégorie $\mathscr{C}$. Une limite inductive (X, φ_i) *du système est la donnée d'un couple $(X,\ \varphi_i)$, où $X \in |\mathscr{C}|$ et les φ_i forment une famille de morphismes compatibles. Ce couple doit satisfaire la condition suivante : si $\psi_i : X_i \longrightarrow Y$ est une autre famille de morphismes compatibles, alors il existe un unique morphisme $\psi : X \longrightarrow Y$ tel que le diagramme suivant commute pour tous $i \leq j$:*

$$\begin{tikzcd}
& Y & \\
& X \arrow[u, dotted, "\psi"] & \\
X_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[uur, bend left, "\psi_i"] & & X_j \arrow[ul, "\varphi_j"'] \arrow[uul, bend right, "\psi_j"']
\end{tikzcd}$$

La limite inductive, si elle existe, est notée $\varinjlim_{i \in I} X_i$.

Proposition A.3.8 (Existence de la limite projective)
Soit $\mathscr{C}$ une catégorie dans laquelle le produit de toute famille d'objets ainsi que l'égaliseur de toute paire de morphismes existe. Si (X_i, φ_{ij}) est un système projectif dans cette catégorie, alors sa limite projective existe.

Démonstration. Voir [Gug10]. □

Remarques A.3.9 (i) La limite projective existe donc dans **Top** et **Grp**.

(ii) De la même manière, on peut montrer que la limite inductive existe dans ces deux catégories.

Soit (G_i, φ_{ij}) un système inductif de groupes et considérons l'union disjointe

$$G' = \coprod_{i \in I} G_i.$$

On définit alors une relation $\sim$ sur G' de la manière suivante : si $x \in G_i$ et $y \in G_j$, alors

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in I, \varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y).$$

Le fait que I soit un ensemble filtrant implique que $\sim$ est une relation d'équivalence et l'on écrit $G = G'/_{\sim}$. Il faut vérifier que l'on puisse mettre une structure de groupe sur G et qu'il s'agit bien de la limite inductive du système. Soient $[g], [h] \in G$ ainsi que $g \in G_i$, $h \in G_j$ des représentants de ces classes. Puisque I est un ensemble filtrant, il existe k tel que $i, j \leq k$. On pose alors

$$[g][h] = \big[\varphi_{ik}(g)\varphi_{jk}(h)\big]$$

et on vérifie que c'est bien défini (cela ne dépend pas des représentants choisis ni de l'indice k). On définit pour chaque $i \in I$ l'application $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$ qui envoie g sur

$[g]$, qui est un homomorphisme de groupes. Si $g \in G_i$ et $i, j \in I$ sont tels que $i \leq j$, alors $g \sim \varphi_{ij}(g)$, et donc $\varphi_i(g) = \varphi_j \varphi_{ij}(g)$, ce qui implique qu'il s'agit de morphismes compatibles.

Définition A.3.10 (Sous-ensemble cofinal)
Soit I un ensemble filtrant et $J \subset I$. J est dit cofinal *dans I si pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel que $i \leq j$.*

Proposition A.3.11
Soit I un ensemble filtrant et $J \subset I$ un ensemble cofinal. Alors, si (X_i, φ_{ij}) est un sytème direct (respectivement projectif), on a $\varinjlim_{i \in I} X_i \cong \varinjlim_{i \in J} X_i$ (respectivement $\varprojlim_{i \in I} X_i \cong \varprojlim_{i \in J} X_i$).

A.4 Topologie

Proposition A.4.1
Soient X et Y deux espaces topologiques ainsi que $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors, pour tout sous-ensemble A de X on a :

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Démonstration. Puisque f est continue, $f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$ est un fermé de X qui contient A, on a donc

$$\overline{A} \subset f^{-1}\Big(\overline{f(A)}\Big),$$

ce qui implique

$$f(\overline{A}) \subset f\Big(f^{-1}\Big(\overline{f(A)}\Big)\Big) \subset \overline{f(A)}.$$

□

Table des notations

$\langle S\rangle$	Idéal engendré par les éléments de S
$\mathbb{A}^n$	Espace affine de dimension n
$\mathcal{A}(S)$	Idéal constitué des polynômes ayant pour racines les éléments de S
$\mathbf{Ab}$	Catégorie des groupes abéliens
$\mathfrak{Ab}(X)$	Catégorie des faisceaux sur un espace topologique X
$\mathbf{Alg}_K^{f,r}$	Catégorie des K-algèbres réduites de type fini
∂f	Degré du polynôme f
$\mathbf{Grp}$	Catégorie des groupes
$I\,R_P$	Idéal I vu dans R_P
$\hom(I)$	Ensemble des éléments homogènes de l'idéal I
$\hom(X,Y)$	Ensemble de morphisme de X vers Y
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers strictement positifs
$\mathbb{N}_0$	Ensemble des entiers non-négatifs
$\mathbb{P}$	Ensemble des nombres premiers
R_f	Localisation de R en f (c'est-à-dire en $\{1,f,f^2,\ldots\}$)
R_P	Localisation de R en l'idéal premier P
R_{red}	$R_{\mathrm{red}}=R/\sqrt{\{0\}}$
$\mathfrak{Sch}(S)$	Catégorie des S-schémas
$\Gamma(V)$	Anneau des coordonnées d'un ensemble algébrique V
$\mathbf{Top}$	Catégorie des espaces topologiques
$\mathcal{V}(S)$	Racines communes des polynômes appartenant à S
$\mathbf{V}$	Catégorie des variétés
$\mathbf{V}^K$	Catégorie des variétés sur K
$\mathbf{V}_{aff}^K$	Catégorie des variétés affines sur un corps K

Index

Bibliographie

[Bor94] Francis Borceux, *Handbook of categorical algebra*, Cambridge University Press, 1994.

[DD89] J. Dieudonné and J.A. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*, Springer, 1989.

[Gri07] Pierre Antoine Grillet, *Abstract algebra (Graduate texts in mathematics, Vol. 242)*.

[Gug10] Rafael Guglielmetti, *Groupes profinis et cohomologie galoisienne*, Disponible à l'adresse `http://www.allpotes.ch/raf/epfl/groupes_profinis.pdf`, 2010.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer Verlag, 1977.

[Lan99] S. Lang, *Complex analysis*, 3 ed., Springer Verlag, 1999.

[LE06] Q. Liu and R. Erné, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford University Press, USA, 2006.

[ML98] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer verlag, 1998.

[Per95] D. Perrin, *Géométrie algébrique : une introduction*, EDP Sciences, 1995.

[Rab30] JL Rabinowitsch, *Zum Hilbertschen Nullstellensatz*, Mathematische Annalen **102** (1930), no. 1, 520–520.

[Tes10] Donna Testerman, *Anneaux et modules*, Disponible à l'adresse `http://www.allpotes.ch/raf/epfl/anneaux_modules.pdf`, 2010.

[Tsu07] Yoshifumi Tsuchimoto, *Sheafification of a sheaf*, Disponible à l'adresse `http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/bourdoki/NAS/nas002/node16.html`, 2007.