



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

SMA

Introduction à la théorie des catégories et aux lemmes de diagrammes

Rafael GUGLIELMETTI et Dimitri ZAGANIDIS
2ème année bachelor

Sous la direction de Caroline LASSUEUR, doctorante (chaire du prof. Thévenaz)

Table des matières

1	Introduction	5
2	Introduction aux catégories	5
2.1	Fondation logique pour la théorie des catégories	5
2.2	Catégories et premiers exemples	7
2.3	Principe de dualité	8
2.4	Propriétés des morphismes	9
2.4.1	Monomorphismes	9
2.4.2	Epimorphismes	10
2.4.3	Isomorphismes	11
2.5	Quelques exemples de propriétés universelles	12
2.5.1	Diagrammes	12
2.5.2	Produits et coproduits	12
2.5.3	Egaliseurs et coégaliseurs	15
2.5.4	Images	17
2.5.5	Pullbacks et pushouts	18
3	Catégories abéliennes	19
3.1	Prérequis aux catégories abéliennes	19
3.1.1	Objets et morphismes zéros	19
3.1.2	Noyaux et conoyaux	20
3.2	Définition et premiers exemples	21
3.3	Premiers résultats pour les catégories abéliennes	22
3.4	Existence de l'image	25
3.5	Suite exacte	28
3.6	Préliminaires à la chasse dans les diagrammes	29
3.6.1	Pseudo-éléments	29
3.6.2	Propriétés des pseudo-éléments et de la pseudo-égalité	30
4	Lemmes de Diagrammes	34
4.1	Lemme des 5	34
4.2	Lemme du serpent	35
5	Bibliographie	39

Table des figures

1	ooo	1
2	Produit	12
3	Unicité du produit à isomorphisme près	14
4	Coproduit	15
5	Egaliseur	15
6	Un égaliseur est un monomorphisme	16
7	Coégaliseur	17
8	Exemple de coégaliseur	17
9	Image	18
10	Pullback	18
11	Le pullback d'un monomorphisme est un monomorphisme	19
12	Noyau	20
13	Pullback (1)	24
14	Pullback (2)	24
15	Factorisation par l'image	26
16	Factorisation par l'image : Preuve que m est un monomorphisme	26
17	Lemme des 5 (première version)	29
18	Pseudo-égalité	30
19	Transitivité de la relation de pseudo-égalité	30
20	Pseudo-éléments et épimorphismes	32
21	Pseudo-éléments et suites exactes (1)	32
22	Pseudo-éléments et suites exactes (2)	33
23	Lemme des 4	34
24	Lemme des 5	35
25	Lemme du noyau	35
26	Lemme du serpent	36
27	Lemme du serpent : construction du morphisme de connexion (1)	37
28	Lemme du serpent : construction du morphisme de connexion (2)	38
29	Lemme du serpent : action de $\tilde{\omega}$	38

Résumé

Dans ce travail, nous présentons une introduction à la théorie des catégories, notion unificatrice des structures algébriques et outil puissant des mathématiques modernes. Nous exposons un développement ne nécessitant aucun prérequis et conduisant à des lemmes de diagrammes utiles et ô combien sympathiques.

1 Introduction

La théorie des catégories est une branche des mathématiques qui a été développée dans les années 1940 par les mathématiciens Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane, puis propagée par Alexander Grothendieck durant les années 1960. Elle permet de généraliser le concept de structures algébriques et d'applications conservant cette structure, qu'il s'agisse d'espaces vectoriels et d'applications linéaires ou de groupes et de leurs homomorphismes. Cette théorie abstraite est devenue un outil indispensable dans les mathématiques modernes, notamment en algèbre, en géométrie algébrique, en topologie algébrique, etc.

L'objectif de ce travail est de présenter une introduction à la théorie des catégories dans le but d'introduire la technique de « chasse dans les diagrammes » ainsi que deux résultats importants : le lemme des 5 et le lemme du serpent.

Nous avons choisi de faire une présentation complète des concepts nécessaires pour démontrer les lemmes de diagrammes, raison pour laquelle ils apparaissent tard dans l'exposé.

Après avoir présenté les fondations logiques nécessaires, nous présentons la définition de catégories et quelques exemples. Par la suite, nous exposons certaines propriétés de base des morphismes ainsi que des exemples de propriétés universelles. Nous pouvons alors introduire le concept de catégorie abélienne et de suites exactes afin de parler de la chasse dans les diagrammes et des lemmes correspondants.

2 Introduction aux catégories

2.1 Fondation logique pour la théorie des catégories

Afin de parler de catégories des ensembles, nous aimerions définir un ensemble \mathcal{U} qui vérifierait $S \in \mathcal{U}$ si et seulement si S est un ensemble. Malheureusement, il est bien connu qu'un tel ensemble n'existe pas. Nous allons donc devoir contourner cette difficulté en introduisant l'univers de Grothendieck. Pour cela, on utilise les axiomes ZFC comme contexte pour la théorie des ensembles (voir [4] pour la définition, [1] pour l'axiome d'existence). Intuitivement, l'univers sera un ensemble qui contient les ensembles « suffisamment petits » pour ne pas poser de problèmes et de telle sorte qu'il soit suffisamment riche pour ce que nous voulons en faire.

Définition 2.1 (Univers)

Un univers \mathcal{U} est un ensemble vérifiant les axiomes suivants :

- (U1) $x \in y$ et $y \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in \mathcal{U}$;
- (U2) $x, y \in \mathcal{U} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathcal{U}$;
- (U3) $(I \in \mathcal{U} \text{ et } x_i \in \mathcal{U}, \forall i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$;
- (U4) $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathcal{U}$ où $\mathcal{P}(x)$ est l'ensemble des parties de x .

Cette définition correspond à l'intuition qu'un univers soit suffisamment riche, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.2

- (i) $X \in \mathcal{U} \Rightarrow \{X\} \in \mathcal{U}$;
- (ii) $X, Y \in \mathcal{U} \Rightarrow (X, Y) \in \mathcal{U}$;

- (iii) $X, Y \in \mathcal{U} \Rightarrow X \times Y \in \mathcal{U}$;
- (iv) $X, Y \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{F}(X, Y) \in \mathcal{U}$ où $\mathcal{F}(X, Y)$ est l'ensemble des applications de X dans Y ;
- (v) $(I \in \mathcal{U} \text{ et } x_i \in \mathcal{U}, \forall i \in I) \Rightarrow \bigsqcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$;
- (vi) $(I \in \mathcal{U} \text{ et } x_i \in \mathcal{U}, \forall i \in I) \Rightarrow \prod_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$.

Démonstration.

- (i) C'est un cas particulier de **(U2)** avec $x = y$.
- (ii) La définition du couple en termes d'ensembles est $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Par conséquent, il suffit d'appliquer deux fois **(U2)**, pour x, y puis pour $\{x\}, \{x, y\}$.
- (iii) Pour tout $x \in X$, on a $x \in \mathcal{U}$ **(U1)**. Soit $y \in Y$, on a de même $y \in \mathcal{U}$. Par conséquent, $(x, y) \in \mathcal{U}$, $\forall x \in X$ (par (ii)) et donc $\{(x, y)\} \in \mathcal{U}$, $\forall x \in X$. Utilisant l'axiome **(U3)** sur la famille d'indices $X \in \mathcal{U}$ et les éléments $a_x = (x, y)$ de \mathcal{U} , on obtient

$$\bigcup_{x \in X} a_x = \{(x, y) \mid x \in X\} \in \mathcal{U}.$$

Ceci est vrai pour tout $y \in Y$ et utilisant de la même façon **(U3)** sur la famille d'indices $Y \in \mathcal{U}$ et les éléments $a_y = \{(x, y) \mid x \in X\}$ de \mathcal{U} . On obtient alors le résultat :

$$\bigcup_{y \in Y} a_y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} = X \times Y \in \mathcal{U}.$$

- (iv) Le fait que $\mathcal{F}(X, Y) \in \mathcal{P}(X \times Y)$ et **(U4)** puis **(U1)** nous fournissent le résultat.
- (v) Posons $a_i = x_i \times \{i\}$ pour tout $i \in I$. D'après (ii) et (iii), $a_i \in \mathcal{U}$ pour tout $i \in I$. Alors par l'axiome **(U3)** appliqué à la famille I et aux éléments a_i de \mathcal{U} , il vient

$$\bigcup_{i \in I} a_i = \bigcup_{i \in I} x_i \times \{i\} = \bigsqcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}.$$

- (vi) Par définition,

$$\prod_{i \in I} x_i = \left\{ f \in \mathcal{F} \left(I, \bigcup_{i \in I} x_i \right) \mid f(i) \in x_i \forall i \in I \right\}.$$

Par conséquent,

$$\prod_{i \in I} x_i \subseteq \mathcal{F} \left(I, \bigcup_{i \in I} x_i \right).$$

Or, par **(U3)**, $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$ et donc par (iv), $\mathcal{F} \left(I, \bigcup_{i \in I} x_i \right) \in \mathcal{U}$, puis par **(U4)** et **(U1)**, on obtient le résultat. \square

Pour continuer à travailler avec les univers, nous avons besoin de l'axiome suivant.

Axiome 2.3

Tout ensemble est contenu dans un univers.

On peut maintenant choisir \mathcal{U} tel que $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$. On voit qu'un tel univers est « assez grand », puisque presque toutes les constructions mathématiques que l'on peut vouloir faire seront dans cet univers. On va donc se fixer cet univers et le noter \mathcal{U} par la suite. Nous allons maintenant définir ce qu'est une classe et un petit-ensemble, pour pouvoir énoncer la définition de catégorie.

Définition 2.4 (Classe et petit-ensemble)

- (i) On appellera classe les sous-ensembles de \mathcal{U} .
- (ii) On appellera petit-ensemble les éléments de \mathcal{U} .

Par la suite, nous utiliserons le terme ensemble à la place de petit-ensemble pour ne pas alourdir les énoncés. Maintenant, la classe \mathcal{U} vérifie $S \in \mathcal{U}$ si et seulement si S est un ensemble. On peut donc définir les catégories.

2.2 Catégories et premiers exemples

Dans cette partie et les suivantes, nous suivrons globalement l'approche de Francis Borceux [1].

Définition 2.5 (Catégorie)

Une catégorie \mathcal{C} comporte les éléments suivants :

- (i) Une classe $|\mathcal{C}|$ dont les éléments sont appelés les objets de la catégorie.
- (ii) A chaque couple d'objets (A, B) , est associé un ensemble $\mathcal{C}(A, B)$, dont les éléments sont appelés morphismes de A vers B . On appelle A le domaine et B le codomaine d'un morphisme de $\mathcal{C}(A, B)$.
- (iii) A chaque triple d'objets (A, B, C) , est associé une loi de composition

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) &\longrightarrow \mathcal{C}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

La catégorie vérifie de plus les axiomes suivants :

(Associativité) Si $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$, $h \in \mathcal{C}(C, D)$, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(Identité) Pour tout objet A de \mathcal{C} , il existe un morphisme $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ tel que pour tous objets A, B de \mathcal{C} et pour tous $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$, on a :

$$1_B \circ f = f, \quad g \circ 1_A = g.$$

On appelle 1_A l'identité sur A .

Notation 2.6

- (i) On notera souvent $f \in \mathcal{C}(A, B)$ par $f : A \longrightarrow B$ et $g \circ f$ par gf .
- (ii) On notera la proposition « A est un objet de \mathcal{C} » par $A \in \mathcal{C}$.
- (iii) On notera aussi respectivement le domaine et le codomaine de f par $\text{dom}(f)$ et $\text{codom}(f)$.
- (iv) Lorsque nous ne voudrions pas spécifier explicitement le domaine ou le codomaine d'un morphisme f , on le notera \bullet .

Remarque 2.7

- (i) L'identité sur un objet A d'une catégorie est unique. En effet, si e_A et 1_A sont des identités sur A , on obtient

$$e_A = e_A \circ 1_A = 1_A,$$

où l'on a utilisé l'axiome d'identité pour 1_A puis pour e_A .

- (ii) Il faut comprendre que $\mathcal{C}(A, B)$ peut être un ensemble absolument quelconque. Dans la plupart des exemples, il s'agira d'applications de domaine A et de codomaine B qui préservent la structure commune aux objets de la catégorie. Ces catégories sont appelées catégories concrètes. Il existe aussi des catégories abstraites, où les morphismes ne sont pas des fonctions. Nous allons le voir dans les exemples suivants.

Exemples 2.8

- (i) La catégorie des groupes **Grp** a pour classe

$$|\mathbf{Grp}| = \{(A, +) \in \mathcal{U} \mid (A, +) \text{ est un groupe}\}$$

et pour ensemble de morphismes, pour tout couple d'objets $A, B \in \mathbf{Grp}$,

$$\mathbf{Grp}(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(A, B) \mid f \text{ est un homomorphisme de groupes}\}.$$

L'associativité pour la composition d'homomorphismes découle de l'associativité de la composition d'applications. L'application $\text{id}_A : A \rightarrow A$ est clairement un homomorphisme et nous fournit le morphisme 1_A , pour tout groupe $(A, +)$. Dans cet exemple, on voit que les morphismes sont effectivement les applications qui préservent la structure de groupe.

- (ii) Nous pouvons aussi voir un monoïde (groupe sans inverses) $(M, *)$ comme une catégorie \mathcal{C} , en la définissant de la façon suivante : $|\mathcal{C}| = \{*\}$, $\mathcal{C}(*, *) = M$ où $*$ est un élément arbitraire et en prenant pour loi de composition

$$\mathcal{C}(*, *) \times \mathcal{C}(*, *) \rightarrow \mathcal{C}(*, *),$$

la loi de composition de $(M, *)$. En effet, définie de cette façon, les axiomes d'associativité et d'identité pour la catégorie sont fournis par ceux du monoïde. Ainsi, cette catégorie nous donne un exemple où les morphismes ne sont pas des applications.

On introduit maintenant le principe de dualité, qui sera un outil puissant dans les démonstrations.

2.3 Principe de dualité

Définition 2.9 (Catégorie duale)

Soit \mathcal{A} une catégorie. On définit la catégorie duale \mathcal{A}^* de \mathcal{A} de la façon suivante :

- (i) $|\mathcal{A}^*| = |\mathcal{A}|$.
(ii) Pour tout couple d'objets A et B de \mathcal{A} , $\mathcal{A}^*(A, B) = \mathcal{A}(B, A)$ (autrement dit, le sens des morphismes est inversé). Pour éviter toute confusion, on écrira $f^* : B \rightarrow A$ pour désigner le morphisme associé à $f : A \rightarrow B$.
(iii) La loi de composition sur \mathcal{A}^* est définie de la manière suivante :

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^*.$$

Remarque 2.10

- (i) La catégorie duale de la catégorie duale est la catégorie elle-même, c'est-à-dire $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.
(ii) L'identité sur A dans \mathcal{A}^* est $(1_A)^*$. En effet, soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$. On obtient

$$f^* \circ (1_A)^* = (1_A \circ f)^* = f^*, \quad (1_A)^* \circ g^* = (g \circ 1_A)^* = g^*.$$

Définition 2.11 (Proposition duale)

A partir d'une proposition, on définit la proposition duale en inversant la direction de chaque morphisme et en remplaçant chaque composition $g \circ f$ par $f \circ g$.

Définition 2.12 (Proposition auto-duale)

On dit qu'une proposition est auto-duale si elle est sa propre proposition duale.

Théorème 2.13 (Principe de dualité)

Supposons qu'une proposition exprimant l'existence d'objets, de morphismes ou indiquant l'égalité de composition entre eux soit valide dans toute catégorie. Alors, la proposition duale est aussi valide dans toute catégorie.

Démonstration.

Soit \mathcal{P} une telle proposition et \mathcal{P}^* sa proposition duale. Pour prouver \mathcal{P}^* dans toute catégorie \mathcal{A} , il suffit de prouver \mathcal{P} dans toute catégorie \mathcal{A}^* . Mais, par hypothèse, \mathcal{P} est censée être vraie dans toute catégorie. \square

Pour un exemple détaillé d'utilisation du principe de dualité, voir la preuve de la proposition 2.24 page 11.

2.4 Propriétés des morphismes

Lorsque l'on se donne une loi de composition dans une structure mathématique, on s'intéresse souvent aux éléments « simplifiables » ou « inversibles » par rapport à cette loi. C'est ce que nous allons faire dans cette partie. Dans la plupart des catégories concrètes, il s'agit d'une généralisation des concepts d'injection, de surjection et d'isomorphisme.

2.4.1 Monomorphismes

Définition 2.14 (Monomorphisme)

Un morphisme $f : A \rightarrow B$ d'une catégorie \mathcal{C} est appelé un monomorphisme lorsque pour tout objet C de \mathcal{C} et tout couple de morphismes $g, h : C \rightrightarrows A$, on a

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$$

On dit aussi que f est simplifiable à gauche.

Notation 2.15

On notera souvent $f : A \hookrightarrow B$ pour indiquer que f est un monomorphisme.

Exemples 2.16

- (i) Introduisons la catégorie des ensembles **Set**. La classe de ses objets est $|\mathbf{Set}| = \mathcal{U}$ et pour tout couple d'objets $A, B \in \mathbf{Set}$, son ensemble de morphismes est $\mathbf{Set}(A, B) = \mathcal{F}(A, B)$. Les monomorphismes de cette catégorie correspondent exactement aux applications injectives.

En effet, soit $f : A \hookrightarrow B$ et $a, b \in A$ tels que $f(a) = f(b)$ ainsi que $I \in \mathbf{Set}$, $I \neq \emptyset$. Soit maintenant $g, h : I \rightrightarrows A$ définies par $g(i) = a$ et $h(i) = b$ pour tout $i \in I$. Alors on a

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h \xrightarrow{I \neq \emptyset} a = b.$$

Ceci prouve l'injectivité de f .

Réciproquement, soit $f : A \rightarrow B$ une application injective et $g, h : I \rightrightarrows A$. On voit que

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow f(g(i)) = f(h(i)) \quad \forall i \in I \Rightarrow g(i) = h(i) \quad \forall i \in I \Rightarrow g = h,$$

où l'on a utilisé l'injectivité de f pour la deuxième implication. Ceci prouve que f est un monomorphisme.

- (ii) Cette preuve s'applique aussi dans le cadre de la catégorie des espaces topologiques **Top**. Cette catégorie a pour classe

$$|\mathbf{Top}| = \{(X, \mathcal{T}) \in \mathcal{U} \mid (X, \mathcal{T}) \text{ est un espace topologique}\}$$

et pour ensemble de morphismes, pour tout couple d'objets $A, B \in \mathbf{Top}$,

$$\mathbf{Top}(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(A, B) \mid f \text{ est continue}\}.$$

Les monomorphismes sont alors exactement les applications continues injectives. En effet, dans la preuve de l'exemple précédente, il suffit de munir l'ensemble I de la topologie discrète pour s'assurer que les applications f et g sont continues.

Remarque 2.17

Au vu des deux exemples précédents, on voit que la notion de monomorphisme dans les catégories concrètes est souvent une généralisation du concept d'injection. On pourrait penser que dans tous ces exemples, les monomorphismes sont exactement les morphismes injectifs. Cela s'avère faux en général. Un exemple dual sera fourni par la suite.

2.4.2 Epimorphismes

Définition 2.18 (Epimorphisme)

Un morphisme $f : A \rightarrow B$ d'une catégorie \mathcal{C} est appelé un épimorphisme lorsque pour tout objet C de \mathcal{C} et tout couple de morphismes $g, h : B \rightrightarrows C$ on a

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$$

On dit aussi que f est simplifiable à droite.

Notation 2.19

On notera souvent $f : A \twoheadrightarrow B$ pour indiquer que f est un épimorphisme.

Remarque 2.20

On peut voir que la proposition duale de « $f : A \hookrightarrow B$ » est « $f^* : B \twoheadrightarrow A$ ». En effet, si $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$, alors

$$g^* \circ f^* = h^* \circ f^* \Rightarrow (f \circ g)^* = (f \circ h)^* \Rightarrow f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h \Rightarrow g^* = h^*.$$

Par conséquent, f^* est un épimorphisme.

La notion d'épimorphisme est dans certains cas une généralisation du concept de surjection, comme on va le voir dans les exemples suivants.

Exemples 2.21

- (i) Les épimorphismes de la catégorie **Set** correspondent exactement aux applications surjectives.

En effet, soit $f : A \twoheadrightarrow B$ et $g, h : B \rightrightarrows \{0, 1\}$ définies par

$$g(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in \text{im}(f), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $h(b) = 1$, pour tout $b \in B$. Alors par construction on a $g \circ f = h \circ f$ et donc $g = h$. Par conséquent, $\text{im}(f) = B$ et f est surjective.

Réciproquement, soit $f : A \rightarrow B$ une application surjective et $g, h : B \rightrightarrows C$ ainsi que $b \in B$. La surjectivité de f implique l'existence de $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Le fait que $g \circ f = h \circ f$ implique $g(f(a)) = h(f(a))$ et donc $g(b) = h(b)$. b ayant été choisi de façon arbitraire dans B , on obtient que $g = h$ et donc que f est un épimorphisme.

- (ii) Comme pour les monomorphismes, on pourrait penser que dans les exemples de catégories concrètes, les épimorphismes sont exactement les morphismes surjectifs. Cela s'avère faux en général comme on va le montrer dans l'exemple suivant. Considérons la catégorie des anneaux associatifs et unitaires **Rng**. Cette catégorie a pour classe

$$|\mathbf{Rng}| = \{(A, +, *) \in \mathcal{U}\} \mid (A, +, *) \text{ est un anneau associatif et unitaire}\}$$

et pour ensemble de morphismes, pour tout couple d'objets $A, B \in \mathbf{Rng}$,

$$\mathbf{Rng}(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(A, B) \mid f \text{ est un homomorphisme d'anneaux}\}.$$

Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ l'injection canonique de \mathbb{Z} dans \mathbb{Q} . On va prouver que f est un épimorphisme. Pour cela, soit $g, h : \mathbb{Q} \rightrightarrows A$ deux homomorphismes d'anneaux tels que $g \circ f = h \circ f$. On doit montrer que $g = h$. Soit encore $z \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$. Alors z est inversible dans \mathbb{Q} d'inverse z^{-1} . Par conséquent, $g(z)$ et $h(z)$ sont inversibles : $g(z)^{-1} = g(z^{-1})$ et $h(z)^{-1} = h(z^{-1})$. De plus

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g(z') = h(z') \quad \forall z' \in \mathbb{Z}.$$

On conclut donc que pour tous $z, z' \in \mathbb{Z}$,

$$g(z' \cdot z^{-1}) = g(z') \cdot g(z)^{-1} = h(z') \cdot h(z)^{-1} = h(z' \cdot z^{-1}).$$

Ainsi, $g = h$ et f est un épimorphisme. On voit facilement que f n'est pas une surjection, ce qui montre que surjections et épimorphismes ne coïncident pas en général.

Proposition 2.22

Soient f et g des morphismes d'une catégorie tels que $f \circ g$ est un épimorphisme. Alors f est un épimorphisme.

Démonstration.

Soient k et k' des morphismes tels que $k \circ f = k' \circ f$. On a alors $k \circ f \circ g = k' \circ f \circ g$, et donc $k = k'$, puisque $f \circ g$ est un épimorphisme. \square

2.4.3 Isomorphismes

Définition 2.23 (Isomorphisme)

Dans une catégorie \mathcal{C} , un isomorphisme entre A et B est un morphisme $f : A \rightarrow B$ tel qu'il existe $g : B \rightarrow A$ vérifiant

$$g \circ f = 1_A, \quad f \circ g = 1_B.$$

Un tel morphisme est appelé inverse de f .

On dit alors que A et B sont isomorphes dans \mathcal{C} , et on note $A \cong B$.

Remarque 2.24

- (i) L'inverse d'un morphisme est unique s'il existe. En effet, si g et \tilde{g} sont deux inverses de $f : A \rightarrow B$, alors on a

$$g = g \circ 1_B = g \circ (f \circ \tilde{g}) = (g \circ f) \circ \tilde{g} = 1_A \circ \tilde{g} = \tilde{g}.$$

On notera f^{-1} l'inverse de f .

- (ii) La notion d'isomorphisme est auto-duale. En effet, si $f : A \rightarrow B$ vérifie la définition, on a

$$f^* \circ f^{-1*} = (1_B)^*, \quad f^{-1*} \circ f^* = (1_A)^*.$$

Par conséquent $f^* : B \rightarrow A$ est un isomorphisme par la remarque 2.10.

- (iii) Si $f : A \rightarrow B$ est un isomorphisme, alors f est un monomorphisme et un épimorphisme. En effet, soient $g, h : I \twoheadrightarrow A$. Alors, on obtient

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h \Rightarrow g = h.$$

Ceci prouve que f est un monomorphisme. Par le principe de dualité, f est un épimorphisme. En effet, dans la catégorie \mathcal{C}^* , duale de \mathcal{C} , f^* est encore un isomorphisme. Puisque la première partie de la preuve s'applique dans \mathcal{C}^* , f^* est un monomorphisme dans \mathcal{C}^* . Par conséquent, $(f^*)^* = f$ est un épimorphisme dans $(\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C}$.

La réciproque de la dernière remarque est fautive en général, comme le montre l'exemple suivant.

Exemples 2.25

- (i) Dans la catégorie **Top**, les isomorphismes sont les applications continues bijectives, à inverse continue. Un morphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est seulement une application continue bijective, mais son inverse n'est pas nécessairement continu.
- (ii) On peut maintenant voir un groupe comme une catégorie. Reprenant l'exemple 2.8 (ii), on peut définir un groupe de la même façon en exigeant en plus que tous les morphismes soient des isomorphismes.

2.5 Quelques exemples de propriétés universelles

Nous ne définissons pas formellement la notion de propriété universelle, car cela nous entraînerait trop loin. De façon intuitive, il s'agit typiquement d'une construction telle que certaines circonstances assurent l'existence et l'unicité d'un morphisme. Ce chapitre donne quelques exemples de ces propriétés dont nous aurons besoin par la suite. Le lecteur qui voudrait une définition formelle trouvera ce qu'il recherche dans le livre de Saunders Mac Lane [3], à la page 55.

Avant de présenter ces constructions, nous devons définir la notion de diagramme commutatif. Cela sera l'objet des deux définitions suivantes.

2.5.1 Diagrammes

Définition 2.26 (Diagramme)

Un diagramme d'une catégorie \mathcal{C} est un multigraphe orienté $D = (V, E)$ où :

- (i) $V \subseteq \mathcal{C}$ et V est de cardinal fini ;
- (ii) les arêtes d'un objet A vers un objet B sont des morphismes de A vers B et sont en nombre fini.

Définition 2.27 (Diagramme commutatif)

- (i) Dans un diagramme, on appelle chemin d'un objet A à un objet B , une suite de morphisme a_i , $1 \leq i \leq n$ telle que

$$\text{dom}(a_1) = A, \quad \forall 1 \leq i < n, \quad \text{codom}(a_i) = \text{dom}(a_{i+1}), \quad \text{codom}(a_n) = B.$$

- (ii) Un diagramme D d'une catégorie \mathcal{C} est dit commutatif si pour toute paire d'objets $A, B \in \mathcal{C}$ et toute paire de chemins a_i, b_j , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, de A à B dans D , on a :

$$\prod_{i=0}^{n-1} a_{n-i} = \prod_{j=0}^{m-1} b_{m-j}.$$

2.5.2 Produits et coproduits

Définition 2.28 (Produit)

Soit \mathcal{C} une catégorie ainsi que $A, B \in \mathcal{C}$. Un produit de A et de B est un triple (P, p_A, p_B) satisfaisant :

- (i) $P \in \mathcal{C}$,
- (ii) $p_A \in \mathcal{C}(P, A)$ et $p_B \in \mathcal{C}(P, B)$,

et tel que pour tout triple (Q, q_A, q_B) , où

- (i) $Q \in \mathcal{C}$,
- (ii) $q_A \in \mathcal{C}(Q, A)$ et $q_B \in \mathcal{C}(Q, B)$,

il existe un unique morphisme $r : Q \rightarrow P$ tel que le diagramme suivant commute :

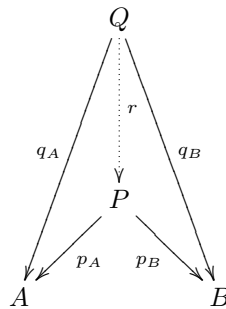


Diagramme 1: Produit

Exemples 2.29

- (i) Dans la catégorie **Set**, le produit de deux objets est leur produit cartésien.
- (ii) Dans les catégories **Grp**, **Ab** (la catégorie des groupes abéliens) et **Rng** le produit de plusieurs objets est leur produit cartésien, et les lois de composition sont définies composante par composante par les lois initiales. Par exemple, si $(G_1, *_1), \dots, (G_n, *_n)$ sont des groupes avec leur loi de composition, la loi $*$ du produit sera définie de la manière suivante :

$$(a_1, \dots, a_n) * (b_1, \dots, b_n) = (a_1 *_1 b_1, \dots, a_n *_n b_n), \quad \forall a_i, b_i \in G_i.$$

- (iii) Dans la catégorie **Top**, le produit d'une famille d'espaces topologiques $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$, est l'espace topologique (X_π, \mathcal{T}_π) , défini de la manière suivante. L'ensemble X_π est le produit cartésien des ensembles X_i , $i \in I$. Définissons

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i : U_i \in \mathcal{T}_i, U_i \neq X_i \text{ sur un sous-ensemble fini de } I \right\}.$$

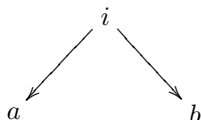
La topologie \mathcal{T}_π est celle engendrée par la base \mathcal{B} .

- (iv) Soit $\mathcal{P} = (X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. On peut voir \mathcal{P} comme une catégorie \mathcal{X} dont les objets sont les éléments de X . Pour deux éléments $a, b \in \mathcal{X}$, on définit

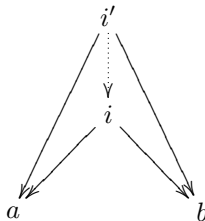
$$\mathcal{X}(a, b) = \begin{cases} \{\star\} & \text{si } a \leq_{\mathcal{P}} b, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

où \star est un élément quelconque. L'associativité de la composition de morphismes est assurée par la transitivité de la relation d'ordre; les morphismes identités sont donnés par la réflexivité et l'unicité du morphisme entre deux éléments est assurée par l'anti-symétrie.

Dans ce cas, le produit d'une famille d'objets est leur infimum, s'il existe. On va le montrer pour deux objets a et b . Supposons que leur infimum i , existe. Par définition de l'infimum, la situation est la suivante :



Supposons maintenant que l'on ait un autre objet $i' \in \mathcal{X}$ et deux autres morphismes comme dans le diagramme suivant :



Alors, on a $i' \leq_{\mathcal{P}} a$ et $i' \leq_{\mathcal{P}} b$ et donc $i' \leq \inf\{a, b\}$. Par conséquent, il existe un morphisme de i' vers i . Puisque entre deux éléments de \mathcal{X} , il ne peut y avoir qu'un seul morphisme, celui-ci est unique. Grâce à la transitivité, le diagramme commute, ce qui achève la preuve.

Proposition 2.30

Si le produit de deux objets existe, il est unique à isomorphisme près.

Démonstration.

Les notations de la proposition 2.28 seront utilisées.

Étape 1. Si on prend $Q = P$ dans la définition du produit, on obtient l'existence d'un unique morphisme $t : P \rightarrow P$ tel que le diagramme 2 commute. Puisque 1_P est un morphisme faisant commuter le diagramme, il est le seul.

Étape 2. En voyant d'abord (P, p_A, p_B) comme un produit et (Q, q_A, q_B) comme un deuxième produit on obtient l'existence d'un unique morphisme $q : Q \rightarrow P$ tel que $p_A \circ q = q_A$ et $p_B \circ q = q_B$. En inversant le rôle de P et de Q , on a l'existence d'un unique morphisme $p : P \rightarrow Q$ tel que $p_A = q_A \circ p$ et $p_B = q_B \circ p$. La situation est la suivante :

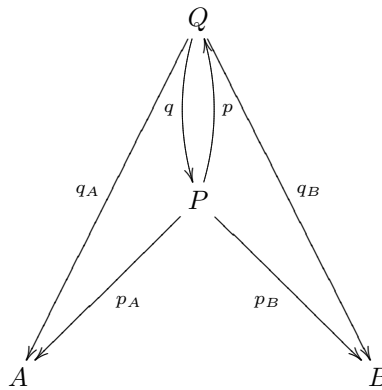


Diagramme 2: Unicité du produit à isomorphisme près

Regardons maintenant,

$$\begin{aligned} p_A &= q_A \circ p = p_A \circ q \circ p, \\ p_B &= q_B \circ p = p_B \circ q \circ p. \end{aligned}$$

On a que $q \circ p : P \rightarrow P$ est un morphisme comme mentionné dans l'étape 1. Par unicité, on a $q \circ p = 1_P$.

De la même manière, on montre que $p \circ q = 1_Q$. Ainsi, on a bien $P \cong Q$.

□

Définition 2.31 (Coproduct)

Soit \mathcal{C} une catégorie ainsi que $A, B \in \mathcal{C}$.

Un coproduit de A et de B est un triple (S, s_A, s_B) satisfaisant :

- (i) $S \in \mathcal{C}$,
- (ii) $s_A \in \mathcal{C}(A, S)$ et $s_B \in \mathcal{C}(B, S)$,

et tel que pour tout triple (T, t_A, t_B) , où

- (i) $T \in \mathcal{C}$,
- (ii) $t_A \in \mathcal{C}(A, T)$ et $t_B \in \mathcal{C}(B, T)$,

il existe un unique morphisme $r : S \rightarrow T$ tel que le diagramme suivant commute :

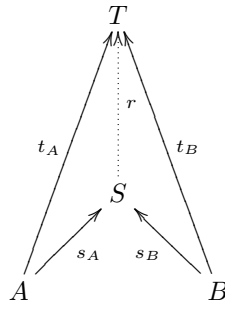


Diagramme 3: Coproduit

Exemples 2.32

- (i) Dans la catégorie **Set**, le coproduit d'une famille d'objets $(C_i)_{i \in I}$ est leur union disjointe. C'est-à-dire que puisque pour tout $i \in I$, on a $C'_i = C_i \cup \{i\}$ est en bijection avec C_i , on peut donc faire simplement l'union sur les C'_i :

$$\coprod_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} C'_i = \{(x, i) : i \in I, x \in C_i\}.$$

- (ii) Dans la catégorie **Ab**, le coproduit d'une famille d'objets est aussi leur produit.
- (iii) Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Leur coproduit (X, \mathcal{T}) est la somme topologique habituelle :
 - X est l'union disjointe des ensembles comme définie au point (i).
 - \mathcal{T} est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{T} = \prod_{i \in I} U_i, U_i \in \mathcal{T}_i \forall i \in I,$$

où, à nouveau, le coproduit est celui défini pour les ensembles.

Remarque 2.33

En utilisant le principe de dualité et la proposition 2.30, on déduit que le coproduit d'un couple d'objets, s'il existe, est unique à isomorphisme près.

2.5.3 Egaliseurs et coégaliseurs

Définition 2.34 (Egaliseur)

Soient A, B deux objets d'une catégorie \mathcal{C} ainsi que $f, g : A \rightrightarrows B$. L'égaliseur (« equalizer » en anglais) de f, g est une paire (K, k) où

- (i) $K \in \mathcal{C}$,
 - (ii) le morphisme $k \in \mathcal{C}(K, A)$ est tel que $f \circ k = g \circ k$,
- telle que pour toute paire (M, m) où

- (i) $M \in \mathcal{C}$,
- (ii) le morphisme $m \in \mathcal{C}(M, A)$ est tel que $f \circ m = g \circ m$,

il existe un unique morphisme $r : M \rightarrow K$ tel que le diagramme suivant commute :

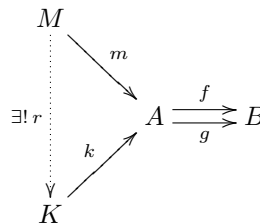


Diagramme 4: Egaliseur

Remarque

Si on prend $M = K$, on aura que $r = 1_K$.

Proposition 2.35

Si l'égaliseur de deux morphismes existe, il est unique à isomorphisme près.

Démonstration.

Reprenons les notations de la définition précédente et supposons que (M, m) et (K, k) sont deux égaliseurs de (f, g) . Puisque (M, m) est un égaliseur, il existe $s : K \rightarrow M$ tel que $m \circ s = k$. En combinant cette équation avec $k \circ r = m$, on a que $k \circ r \circ s = k = k \circ 1_K$. En utilisant le fait que le morphisme induit est unique et la remarque précédente, on obtient que $r \circ s = 1_K$. De la même manière, on peut montrer que $s \circ r = 1_M$. \square

Puisque l'égaliseur est essentiellement unique, on peut écrire $\ker(f, g)$ pour désigner l'égaliseur de f et de g .

Exemple 2.36

Dans les catégories **Set**, **Grp** et **Rng**, l'égaliseur de deux morphismes $f, g : A \rightrightarrows B$ est le sous ensemble de A où les deux morphismes coïncident :

$$\ker(f, g) = \{a \in A : f(a) = g(a)\},$$

et le morphisme est l'injection.

Il est facile de vérifier que dans le cas de **Grp**, ce sous-ensemble est bien un sous-groupe, il est de plus égal au noyau (au sens usuel) du morphisme $f - g$.

Proposition 2.37 (Un égaliseur est un monomorphisme)

Soit (K, k) l'égaliseur de deux morphismes $g, h : A \rightrightarrows B$. Alors k est un monomorphisme.

Démonstration.

Soient K, k, g, h comme dans l'énoncé du théorème ainsi que $f, \tilde{f} : C \rightarrow K$ deux morphismes tels que $k \circ f = k \circ \tilde{f}$. On aimerait montrer que $f = \tilde{f}$. Rappelons que puisque k est un égaliseur, on a $k \circ g = k \circ h$, et donc l'égalité suivante

$$g \circ k \circ f = h \circ k \circ f.$$

Ceci implique que f et \tilde{f} sont des morphismes faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \tilde{f} \downarrow & \searrow^{k \circ f} & \\ f \downarrow & & A \xrightarrow{g} B \\ K \xrightarrow{k} & & \underset{h}{\rightrightarrows} \end{array}$$

Diagramme 5: Un égaliseur est un monomorphisme

Par définition de l'égaliseur, il existe un et un seul morphisme entre C et K , ce qui implique que $f = \tilde{f}$, comme désiré. \square

Définition 2.38 (Coégaliseur)

Soient A, B deux objets d'une catégorie \mathcal{C} ainsi que $f, g : A \rightrightarrows B$. Le coégaliseur (« coequalizer » en anglais) de f, g est une paire (K, k) où

(i) $K \in \mathcal{C}$,

(ii) le morphisme $k \in \mathcal{C}(K, A)$ est tel que $k \circ f = k \circ g$,

telle que pour toute paire (M, m) où

(i) $M \in \mathcal{C}$,

(ii) le morphisme $m \in \mathcal{C}(B, M)$ est tel que $m \circ f = m \circ g$,

il existe un unique morphisme $r : K \rightarrow M$ tel que le diagramme suivant commute :

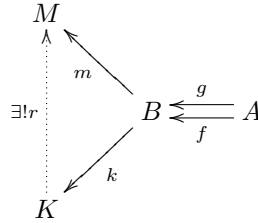


Diagramme 6: Coégaliseur

Exemple 2.39

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de la catégorie \mathbf{Ab} . Alors le coégaliseur de $(f, \mathbf{0})$, où $\mathbf{0}$ est l'homomorphisme de groupe qui envoie chaque objet sur l'élément neutre, est le couple $(B/f(A), \pi)$, où π est l'homomorphisme canonique.

En effet, pour $a \in A$, on a $\pi(f(a)) = 0$, puisque $f(a) \in f(A)$, et donc $\pi \circ f = \pi \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Soit maintenant $q : B \rightarrow Q$ un homomorphisme de groupe tel que $q \circ f = q \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}$, ce qui revient à dire que $f(A) \subset \ker(q)$. Par la propriété universelle du quotient de groupes, on sait qu'il existe un unique homomorphisme de groupe \bar{q} tel que $\bar{q} \circ \pi = q$.

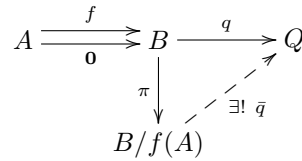


Diagramme 7: Exemple de coégaliseur

De manière plus générale, $f, g \in \mathbf{Ab}(A, B)$, le coégaliseur de (f, g) est le coégaliseur de $(f - g, \mathbf{0})$.

Proposition 2.40 (Un coégaliseur est un épimorphisme)

Soit (K, k) le coégaliseur de deux morphismes $g, h : A \rightrightarrows B$. Alors k est un épimorphisme.

Démonstration.

Découle de la proposition 2.37 et du principe de dualité. □

2.5.4 Images

Définition 2.41 (Image)

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'une catégorie \mathcal{C} . L'image de f , si elle existe, est un monomorphisme $h : I \hookrightarrow B$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(i) Il existe un morphisme $g : A \rightarrow I$ de \mathcal{C} tel que $f = h \circ g$.

(ii) Pour tout triple (C, k, l) où C est un objet de \mathcal{C} , k un morphisme de A vers C et l un monomorphisme de C vers B tel que $f = l \circ k$, il existe un unique morphisme $m : I \rightarrow C$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

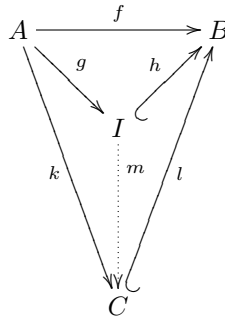


Diagramme 8: Image

Exemple 2.42

Dans les catégories **Set**, **Ab**, **Grp**, par exemple, l'image d'un morphisme $f : A \rightarrow B$ est l'inclusion depuis l'ensemble $\{f(a) : a \in A\}$ dans B .

2.5.5 Pullbacks et pushouts**Définition 2.43 (Pullback)**

Soit \mathcal{C} une catégorie ainsi que deux morphismes $f : A \rightarrow C$ et $g : B \rightarrow C$ dans \mathcal{C} . Un pullback de (f, g) est un triple (P, f', g') , où

(i) $P \in \mathcal{C}$;

(ii) f', g' sont des morphismes de \mathcal{C} tels que $f \circ g' = g \circ f'$,

et tel que pour tout autre triple (Q, f'', g'') , où

(i) $Q \in \mathcal{C}$;

(ii) f'', g'' sont des morphismes de \mathcal{C} tels que $f \circ g'' = g \circ f''$,

il existe un unique morphisme $q : Q \rightarrow P$ tel que le diagramme suivant commute :

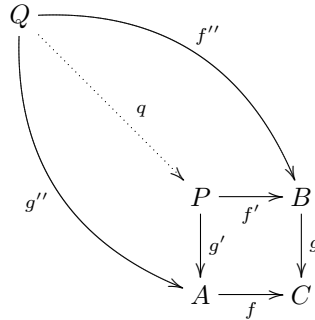


Diagramme 9: Pullback

Remarque 2.44

Lorsque l'on parle du pullback d'un morphisme $f : A \rightarrow C$, on parle en fait du morphisme f' dans le pullback de (f, g) , où g est un morphisme de codomaine C .

Proposition 2.45

Le pullback d'un monomorphisme est un monomorphisme.

Démonstration.

Soit $f : A \rightarrow C$ un monomorphisme, $g : B \rightarrow C$ un autre morphisme et (f', g') leur pullback. Supposons maintenant qu'il existe k et k' des morphismes tels que $f' \circ k = f' \circ k'$. On pose ensuite $h = f' \circ k$ et $h' = g' \circ k$. La situation est alors celle représentée sur la diagramme 11.

Remarquons tout d'abord que par choix de h, h' , les triangles (I) et (II) commutent. On a de plus l'égalité suivante : $g \circ h = g \circ f' \circ k = f \circ g' \circ k = f \circ h'$, où l'on a utilisé la commutativité du carré. Ainsi, par définition du pullback, k est l'unique morphisme de X vers Y ayant ces propriétés. On va montrer que k' les satisfait aussi, ce qui entraînera $k = k'$.

La commutativité du triangle (II) provient du fait que, par hypothèse, $f' \circ k' = f' \circ k$, le membre de droite étant égal à h . Pour établir la commutativité du triangle (I), regardons : $f \circ g' \circ k' = g \circ f' \circ k' = g \circ h = f \circ h'$ et donc, puisque f est un monomorphisme, $g' \circ k' = h'$. Il s'ensuit que $k = k'$.

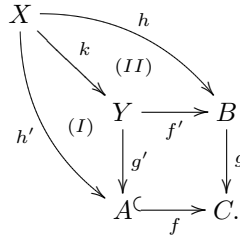


Diagramme 10: Le pullback d'un monomorphisme est un monomorphisme

□

Définition 2.46 (Pushout)

Le pushout de deux morphismes est défini de manière duale à partir du pullback.

3 Catégories abéliennes

La définition de catégorie abélienne, que nous présentons plus bas, assure l'existence de constructions telles que les images et noyaux. Elle présente de plus une structure supplémentaire, notamment sur l'ensemble des morphismes entre deux objets. Ces propriétés des catégories abéliennes sont essentielles pour définir les suites exactes et généraliser la chasse d'éléments dans les diagrammes. Pour la définition de catégorie, nous suivons à quelques nuances près l'approche de Saunders Mac Lane [3].

3.1 Prérequis aux catégories abéliennes

Avant de pouvoir définir ce qu'est une catégorie abélienne, nous devons introduire quelques nouvelles notions, en particulier celle de noyau. Dans ce but, nous allons commencer par définir les notions d'objets et morphismes zéros.

3.1.1 Objets et morphismes zéros

Définition 3.1 (Objet initial et terminal)

Un objet $S \in \mathcal{A}$ est dit initial si pour tout objet $A \in \mathcal{A}$ il existe un et un seul morphisme $S \rightarrow A$. Si S est un objet initial, l'unique morphisme $S \rightarrow S$ est l'identité. De manière duale, on dit qu'un objet T est terminal si pour tout objet $A \in \mathcal{A}$ il existe un et un seul morphisme $A \rightarrow T$. Si T est un objet terminal, l'unique morphisme $T \rightarrow T$ est l'identité.

Proposition 3.2

Si une catégorie possède un objet terminal, il est unique à isomorphisme près.

Démonstration.

Soient T et T' deux objets terminaux d'une catégorie \mathcal{C} . Remarquons tout d'abord que par définition, tout objet A de \mathcal{C} possède un morphisme identité $1_A : A \rightarrow A$. Par conséquent, par définition d'un objet terminal, le seul morphisme de T vers lui-même

est 1_T , de même pour T' .

Puisque T est un objet terminal, il existe un et un seul morphisme $r : T' \rightarrow T$. De même, puisque T est terminal, il existe un et un seul morphisme $s : T \rightarrow T'$. Ainsi, $r \circ s$ est un morphisme de T vers T et donc $r \circ s = 1_T$. On déduit de la même manière que $s \circ r = 1_{T'}$, ce qui conclut la preuve. \square

Proposition 3.3

Si une catégorie possède un objet initial, il est unique à isomorphisme près.

Démonstration.

Cette proposition découle de la précédente et du principe de dualité. \square

Définition 3.4 (Objet zéro)

Un objet qui est à la fois initial et terminal est appelé objet zéro, on le note $\mathbf{0}$.

Remarque 3.5

- (i) Puisque les objets initiaux et terminaux sont uniques à isomorphisme près, l'objet zéro l'est aussi.
- (ii) La notion d'objet zéro est auto-duale, par définition.

Exemples 3.6

- (i) Dans la catégorie **Set**, l'objet initial est l'ensemble vide. Tout singleton est un objet terminal. Par conséquent, il n'y a pas d'objet zéro dans **Set**.
- (ii) Dans la catégorie **Grp**, le groupe trivial est un objet zéro, puisqu'il est à la fois initial et terminal.
- (iii) Dans la catégorie **Rng**, l'objet terminal est l'anneau A à un seul élément pour lequel $1_A = 0_A$. Puisque pour tout anneau A , il existe un et un seul homomorphisme d'anneau $f : \mathbb{Z} \rightarrow A$, \mathbb{Z} est un objet initial. Puisque les objets initiaux et terminaux ne coïncident pas, cette catégorie ne possède pas d'objet zéro.

Définition 3.7 (Morphisme zéro)

Dans une catégorie \mathcal{A} possédant un objet zéro, un morphisme $f : A \rightarrow B$ est appelé morphisme zéro s'il existe $g : A \rightarrow \mathbf{0}$ et $h : \mathbf{0} \rightarrow B$ tels que $f = h \circ g$.

Exemple 3.8

Un morphisme $f : G \rightarrow H$ de la catégorie **Grp** est zéro s'il envoie tous les éléments de G sur l'élément neutre de H .

Remarque 3.9

La notion de morphisme zéro est auto-duale.

Maintenant que la notion de morphisme zéro est définie, on peut introduire la notion de noyau, et par dualité, de conoyau.

3.1.2 Noyaux et conoyaux

Définition 3.10 (Noyau, conoyau)

- (i) *Dans une catégorie possédant un élément $\mathbf{0}$, le noyau d'un morphisme $f : A \rightarrow B$ est défini comme l'égaliseur, s'il existe, de f et du morphisme $\mathbf{0} : A \rightarrow B$. Autrement dit, $k : K \rightarrow A$ est le noyau de f si $f \circ k = \mathbf{0} \circ k = \mathbf{0}$ et si pour tout couple (M, m) avec la propriété $f \circ m = \mathbf{0}$, il existe un unique morphisme r tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccc}
 M & & & & \\
 \exists! r \downarrow & \searrow m & & & \\
 K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{f} & B \\
 & & & \mathbf{0} &
 \end{array}$$

Diagramme 11: Noyau

(ii) Le conoyau d'un morphisme est défini de manière duale.

Proposition 3.11

Soit $f, g : A \rightrightarrows B$ deux morphismes d'une catégorie \mathcal{C} . On a alors

- (i) $\left[f \circ t = \mathbf{0} \Leftrightarrow g \circ t = \mathbf{0} \ \forall X \in \mathcal{C}, \ \forall t : B \rightarrow X \right] \Rightarrow \ker(f) = \ker(g)$;
(ii) $\left[\tilde{t} \circ f = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{t} \circ g = \mathbf{0} \ \forall \tilde{X} \in \mathcal{C}, \ \forall \tilde{t} : \tilde{X} \rightarrow A \right] \Rightarrow \text{coker}(f) = \text{coker}(g)$.

Démonstration.

- (i) Notons $(K, k) = \ker(f)$ et $(Q, q) = \ker(g)$. On a alors par définition, $f \circ k = \mathbf{0}$, ainsi $g \circ k = \mathbf{0}$ et donc, il existe un morphisme $c : Q \rightarrow K$ tel que $k \circ c = q$. De même, en inversant le rôle de k et de q , on obtient l'existence de $\tilde{c} : K \rightarrow Q$ tel que $q \circ \tilde{c} = k$. On a alors

$$q \circ \tilde{c} \circ c = k \circ c = q, \quad k \circ c \circ \tilde{c} = q \circ \tilde{c} = k.$$

Or, k, q sont des monomorphismes car ce sont des égaliseurs. Par conséquent $c^{-1} = \tilde{c}$ et donc $K \cong Q$, ce qui donne $\ker(f) = \ker(g)$.

- (ii) Découle de (i) et de la dualité. □

3.2 Définition et premiers exemples

Nous continuons notre chemin vers la définition de catégorie abélienne en introduisant maintenant les catégories pré-additives, qui possèdent une structure de groupe abélien sur les ensembles de morphismes.

Définition 3.12 (Catégorie pré-additive)

Une catégorie pré-additive est une catégorie \mathcal{A} telle que :

- (A1) pour tous $X, Y \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(X, Y)$ possède une structure de groupe abélien ;
- (A2) pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(X, Y) \times \mathcal{A}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{A}(X, Z)$ est bilinéaire, c'est à dire, si $f, g \in \mathcal{A}(X, Y)$, $h, k \in \mathcal{A}(Y, Z)$, on a :

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h, \quad f \circ (h + k) = f \circ h + f \circ k.$$

Autrement dit, la loi de composition est un homomorphisme de groupes dans chaque variable.

Remarque 3.13

Par définition, la notion de catégorie pré-additive est auto-duale. Ainsi, la catégorie duale d'une catégorie pré-additive est elle-même pré-additive.

Exemple 3.14

La catégorie \mathbf{Ab} des groupes abéliens est une catégorie pré-additive. En effet, pour tout $X, Y \in \mathbf{Ab}$, on peut définir une structure de groupe abélien sur $\mathbf{Ab}(X, Y)$ de la façon suivante : si $f, g \in \mathbf{Ab}(X, Y)$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

De plus, si $h \in \mathbf{Ab}(Z, X)$,

$$[(f + g) \circ h](z) = f(h(z)) + g(h(z)), \ \forall z \in Z,$$

et donc

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h.$$

Enfin, si $h \in \mathbf{Ab}(X, Z)$,

$$[h \circ (f + g)](x) = h(f(x) + g(x)) = h(f(x)) + h(g(x)), \ \forall x \in X,$$

car h est un homomorphisme, et donc $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$, ce qui prouve le résultat.

Définition 3.15 (Catégorie abélienne)

Une catégorie abélienne est une catégorie pré-additive \mathcal{A} vérifiant les axiomes supplémentaires suivants :

- **(A3)** il existe un objet zéro $\mathbf{0} \in \mathcal{A}$;
- **(A4)** les produits et coproduits existent dans \mathcal{A} ;
- **(A5)** tous les morphismes de \mathcal{A} ont un noyau et un conoyau ;
- **(A6)** tous les monomorphismes de \mathcal{A} sont des noyaux, tous les épimorphismes sont des conoyaux.

Remarque 3.16

La notion de catégorie abélienne est auto-duale. Par conséquent, le principe de dualité s'applique aussi dans les catégories abéliennes.

Exemples 3.17

- (i) La catégorie **Ab** est une catégorie abélienne. En effet elle est pré-additive (voir exemple 3.14). Vérifions les axiomes :
- **(A3)** L'objet zéro est le groupe trivial.
 - **(A4)** Les produits et coproduits de groupes abéliens existent toujours (ils sont donnés dans les exemples 2.29 et 2.32).
 - **(A5)** Le noyau d'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est exactement $(\ker(f), i)$ où $\ker(f)$ est pris au sens de la théorie des groupes et i est l'injection canonique de celui-ci dans X (voir exemple 2.36), le conoyau d'un homomorphisme $f : X \rightarrow Y$ est exactement $(Y/f(X), \pi)$ (voir exemple 2.39).
 - **(A6)** Tout monomorphisme $f : X \hookrightarrow Y$ est le noyau de $\pi : Y \rightarrow Y/f(X)$, tout épimorphisme $g : X \twoheadrightarrow Y$ est le conoyau de l'injection de son noyau (au sens de la théorie des groupes) dans son domaine.

- (ii) Construisons la catégorie \mathcal{B} de la façon suivante : $|\mathcal{B}| = \mathbb{N}$. Pour tout couple d'entiers non nuls (n, m) , $\mathcal{B}(n, m) = \text{Mat}(m, n, \mathbb{K})$, où $\text{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à coefficients dans un corps \mathbb{K} . Si m ou n est nul, $\mathcal{B}(n, m) = \{0\}$. On définit la composition par multiplication de matrices, et dans le cas de la composition avec 0, l'image est l'élément neutre du groupe de matrice. Cette catégorie est abélienne. En effet, par définition, les axiomes **(A1)**, **(A2)** et **(A3)** sont vérifiés.

Le produit et le coproduit de deux entiers coïncident et sont la somme des deux entiers, pour des projections bien choisies.

De même, le noyau d'une matrice A est $\dim \ker(A)$, son conoyau est $\dim \ker(A^t)$. Vérifier le dernier axiome s'avère un peu technique et nous ne le ferons pas ici.

Les résultats d'algèbre linéaire nous disent que l'on peut voir cette catégorie comme celle des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps \mathbb{K} , quotienté par la relation d'équivalence sur les objets isomorphes. On remarque que cette catégorie abélienne est abstraite.

La proposition suivante justifie l'appellation des morphismes zéros, en montrant qu'ils sont les éléments neutres de groupes abéliens.

Proposition 3.18

Le morphisme zéro d'un objet X vers un objet Y d'une catégorie abélienne \mathcal{A} est l'élément neutre du groupe abélien $\mathcal{A}(X, Y)$.

Démonstration.

Soit $\mathbf{0} : A \rightarrow B$ le morphisme zéro de $\mathcal{A}(X, Y)$. On a $\mathbf{0} = g \circ h$ où $g \in \mathcal{A}(\mathbf{0}, Y)$, $h \in \mathcal{A}(X, \mathbf{0})$ et $|\mathcal{A}(\mathbf{0}, Y)| = |\mathcal{A}(X, \mathbf{0})| = 1$ par définition de l'objet $\mathbf{0}$. Par conséquent on a que g est l'élément neutre de $\mathcal{A}(\mathbf{0}, Y)$. Par conséquent, puisque la loi de composition est bilinéaire, $\mathbf{0} : A \rightarrow B$ est l'élément neutre de $\mathcal{A}(X, Y)$. \square

3.3 Premiers résultats pour les catégories abéliennes

On va d'abord s'intéresser aux implications des axiomes des catégories sur les propriétés des morphismes présentés dans la section 2.4.

Proposition 3.19

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne $X, Y \in \mathcal{A}$ et $f : X \rightarrow Y$. Alors,

- (i) f est un monomorphisme si et seulement si $\ker(f) = \mathbf{0}$.
- (ii) f est un monomorphisme si et seulement si pour tout Z dans \mathcal{A} , pour tout morphisme $g : Z \rightarrow X$ tel que $f \circ g = \mathbf{0}$, on a $g = \mathbf{0}$.
- (iii) f est un épimorphisme si et seulement si $\operatorname{coker}(f) = \mathbf{0}$.
- (iv) f est un isomorphisme si et seulement si f est un monomorphisme et un épimorphisme.

Démonstration.

- (i) Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g, h : Q \rightrightarrows X$ tels que $\ker(f) = \mathbf{0}$ et $f \circ g = f \circ h$. Alors $f \circ (g - h) = \mathbf{0}$. Par conséquent $f \circ (g - h) = \mathbf{0} \circ (g - h)$ et donc par définition du noyau, il existe un unique morphisme de Q vers $\mathbf{0}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 Q & & \\
 \downarrow \mathbf{0} & \searrow^{g-h} & \\
 \mathbf{0} & \xrightarrow{\mathbf{0}} & X \xrightarrow[\mathbf{0}]{f} Y
 \end{array}$$

Ainsi, $g - h = \mathbf{0}$, ce qui implique que $g = h$ et, finalement, que f est un monomorphisme.

Réciproquement, si f est un monomorphisme, alors si $g : Q \rightarrow X$ vérifie $f \circ g = \mathbf{0} \circ g = \mathbf{0} = f \circ \mathbf{0}$, alors $g = \mathbf{0}$ et donc $\mathbf{0}$ vérifie la définition de noyau, puisqu'il existe un unique morphisme $\mathbf{0} : Q \rightarrow \mathbf{0}$ et qu'alors le diagramme du noyau commute, c'est-à-dire $\mathbf{0} \circ \mathbf{0} = \mathbf{0} = g$.

- (ii) Supposons que pour tout Z dans \mathcal{A} , pour tout morphisme $g : Z \rightarrow X$ tel que $f \circ g = \mathbf{0}$, on ait $g = \mathbf{0}$. Alors par définition, $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ vérifie les propriétés du noyau et donc par (i) f est un monomorphisme.

Réciproquement, supposons que f soit un monomorphisme et soit $g : Z \rightarrow X$ soit tel que $f \circ g = \mathbf{0} = f \circ \mathbf{0}$, alors $g = \mathbf{0}$.

- (iii) Découle de (i) et du principe de dualité.
- (iv) Le fait qu'un isomorphisme soit un épimorphisme et un monomorphisme est assuré par la remarque 2.24.

L'axiome **(A6)**, implique que si $f : Z \rightarrow X$ est un monomorphisme, il existe $g : X \rightarrow Z$ tel que $f \circ g = \operatorname{id}_X$. Par conséquent,

$$g \circ f = \mathbf{0} \circ f \Rightarrow g = \mathbf{0},$$

où l'on a utilisé le fait que f est un épimorphisme. Or, le noyau d'un morphisme $\mathbf{0} : X \rightarrow Y$ est un isomorphisme. En effet, $(X, 1_X)$ vérifie la définition, puisque pour tout $g : X \rightarrow A$, g est l'unique morphisme vérifiant $1_A \circ g = g$. Puisque le noyau est unique à isomorphisme près (voir proposition 2.35, page 16), on obtient l'existence de $f' \in \mathcal{A}(X, Z)$ un isomorphisme tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 Z & & \\
 \downarrow f' & \searrow^f & \\
 X & \xrightarrow{1_X} & X \xrightarrow[\mathbf{0}]{\mathbf{0}} Y
 \end{array}$$

Par conséquent $f = f'^{-1} \circ 1_X = f'^{-1}$ et donc f est l'inverse de f' et réciproquement, et donc f est un isomorphisme. \square

La proposition suivante assure l'existence des pullback dans une catégorie abélienne. Elle complète aussi, dans le cas des catégories abéliennes, la proposition 2.45 page 18. Elle sera très utile pour construire les outils de la chasse dans les diagrammes.

Proposition 3.20

- (i) *Le pullback de deux morphismes existe toujours dans une catégorie abélienne.*
- (ii) *Le pullback d'un épimorphisme est un épimorphisme*

Démonstration.

- (i) Dans une catégorie abélienne, les produits existent toujours et chaque morphisme possède un noyau. Ce dernier point implique que l'égaliseur de deux morphismes f et g existe toujours : il suffit de prendre le noyau de $f - g$. On va ainsi pouvoir construire le pullback à partir de ces éléments, en utilisant l'approche fournie par John Armstrong (voir [5]).

Durant la preuve nous utiliserons les diagrammes 13 et 14. Soient $f : B \rightarrow C$ et $g : D \rightarrow C$ deux morphismes d'une catégorie abélienne, ainsi que (P, π_f, π_g) le produit de B et D . Les morphismes $f \circ \pi_f$ et $g \circ \pi_g$ sont deux morphismes de P vers C , desquels on va prendre l'égaliseur $m : S \rightarrow P$. On pose maintenant $f' = \pi_g \circ m$ et $g' = \pi_f \circ m$ et on affirme que (f', g') est le pullback de (f, g) .

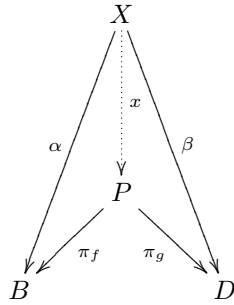


Diagramme 12: Pullback (1)

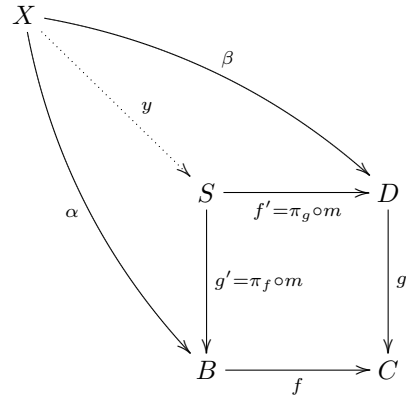


Diagramme 13: Pullback (2)

Le fait que $g \circ f' = f \circ g'$ est évident, par construction des morphismes f' et g' . On aimerait montrer que pour tout couple de morphismes $\alpha : X \rightarrow B$ et $\beta : X \rightarrow D$, tels que $g \circ \beta = f \circ \alpha$, il existe un unique morphisme $y : X \rightarrow S$ faisant commuter le diagramme 14. Une fois donné un couple (α, β) , par définition du produit, il existe un unique morphisme x faisant commuter le diagramme 13. Nous allons montrer que le morphisme x est tel que $f \circ \pi_f \circ x = g \circ \pi_g \circ x$:

$$\begin{aligned} f \circ \pi_f \circ x &= f \circ \alpha \\ &= g \circ \beta \\ &= g \circ \pi_g \circ x, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la commutativité des deux diagrammes ci-dessus. Ainsi, par définition de l'égaliseur, il existe un unique morphisme $y : X \rightarrow S$ tel que $m \circ y = x$. On a donc $\pi_g \circ m \circ y = \pi_g \circ x = \beta$ et, de même, $\pi_f \circ m \circ y = \pi_f \circ x = \alpha$, ce qui implique que y fait bien commuter le diagramme 14.

- (ii) La preuve de cette assertion est donnée dans le livre de Francis Borceux (voir [2]), à la page 29 (il s'agit de la proposition 1.7.6). Pour utiliser cette démonstration, il faudra préalablement définir et obtenir l'existence du biproduit, ceci est fait dans le même livre à la page 4, proposition 1.7.6.

□

3.4 Existence de l'image

Les résultats suivants nous permettent de montrer que dans une catégorie abélienne, chaque morphisme possède une image. Cette existence, associée au fait que le noyau de chaque morphisme existe, est nécessaire pour la définition de suite exacte, concept essentiel utilisé dans un grand nombre de lemmes de diagrammes, dont quelques-uns sont présentés plus bas. L'existence de ces constructions (produit, pullback, image, égaliseur, etc.) justifie à elle seule l'utilisation de catégories abéliennes. Par la suite, nous suivons de nouveau l'approche de Francis Borceux [2].

Lemme 3.21

Si le morphisme x est un noyau, alors $\ker(\operatorname{coker}(x)) = x$.

Démonstration.

Montrons que, pour tout morphisme $u : A \rightarrow B$, $\ker(\operatorname{coker}(\ker(u))) = \ker(u)$.

On se réfère au diagramme ci-dessous. Soit $(K, k) = \ker(u)$, $(Q, q) = \operatorname{coker}(k)$ et $(K', k') = \ker(q)$. On a alors $q \circ k = \mathbf{0}$ et donc l'existence d'un morphisme $c : K \rightarrow K'$ tel que $k' \circ c = k$. Par ailleurs, $u \circ k = \mathbf{0}$ et donc il existe $s : Q \rightarrow B$ tel que $s \circ q = u$. Ainsi, $u \circ k = s \circ q \circ k = \mathbf{0}$. Or $(K, k) = \ker(u)$, ce qui implique l'existence d'un morphisme $c' : K' \rightarrow K$ tel que $k \circ c' = k'$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Q & & \\
 & & \uparrow q & \searrow s & \\
 K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{u} & B \\
 & \searrow c' & \uparrow k' & & \\
 & & K' & & \\
 & \swarrow c & & &
 \end{array}$$

Par conséquent,

$$k' \circ c \circ c' = k \circ c' = k', \quad k \circ c' \circ c = k' \circ c = k.$$

Or, par la proposition 2.37 page 16, k et k' sont des monomorphismes et donc $c' = c^{-1}$, $K \cong K'$ et ainsi $\ker(\operatorname{coker}(\ker(u))) = \ker(u)$.

Maintenant, $x = \ker(u)$ pour un certain u et donc le résultat s'en suit. □

Proposition 3.22

- (i) Dans une catégorie abélienne \mathcal{A} pour tout morphisme $f : A \rightarrow B$ il existe $C \in \mathcal{A}$, $m : C \hookrightarrow B$ un monomorphisme et $e : A \twoheadrightarrow C$ un épimorphisme, tel que $f = m \circ e$. On appelle cette décomposition factorisation par l'image. De plus $m = \ker(\operatorname{coker}(f))$ et $e = \operatorname{coker}(\ker(f))$.
- (ii) Soit $f : A \rightarrow B$, $f' : D \rightarrow E$, $g : A \rightarrow D$, $h : B \rightarrow E$ tels que $h \circ f = f' \circ g$. Autrement dit, f, f', g et h sont tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 g \downarrow & & \downarrow h \\
 D & \xrightarrow{f'} & E
 \end{array}$$

Soit $f' = m' \circ e'$ une factorisation de f' où m' est un monomorphisme et e' un épimorphisme, alors il existe un unique k tel que le diagramme 15 est commutatif :

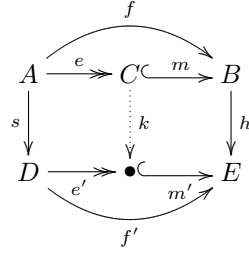


Diagramme 14: Factorisation par l'image

Démonstration.

Pour cette preuve, nous nous sommes inspirés du livre de Saunders Mac Lane [3].

- (i) On se réfère au diagramme 16. Notons $(K, k) = \ker(f)$ et $(E, e) = \operatorname{coker}(\ker(f))$. On a que $f \circ k = \mathbf{0}$ et la définition de e implique l'existence et l'unicité de $m : E \rightarrow B$ tel que $m \circ e = f$.

On doit maintenant prouver que m est un monomorphisme. Pour cela considérons $x : X \rightarrow E$ tel que $m \circ x = \mathbf{0}$. On veut montrer que $x = \mathbf{0}$. On a par définition du conoyau que m se factorise à travers $(Q, q) = \operatorname{coker}(x)$, On note r le morphisme tel que $m = r \circ q$. Or, par la proposition 2.40 page 17, on a que e, q sont des épimorphismes, et donc, on voit facilement que $q \circ e$ l'est aussi. Par conséquent, par l'axiome **(A6)**, il existe h tel que $(Q, q \circ e) = \operatorname{coker}(h)$. De plus

$$f \circ h = r \circ (q \circ e) \circ h = r \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Il existe donc un morphisme $l : H \rightarrow K$ tel que $k \circ l = h$, puisque $(K, k) = \ker(f)$. Par conséquent, $e \circ h = e \circ k \circ l = \mathbf{0} \circ l = \mathbf{0}$. Or, $(Q, q \circ e) = \operatorname{coker}(h)$ et il existe donc $s : Q \rightarrow E$ tel que $s \circ e = h$. Or, e est un épimorphisme et donc $s \circ q = 1_E$. On obtient donc que q est un monomorphisme. De plus $q \circ x = \mathbf{0}$ et donc $x = \mathbf{0}$.

Ainsi, m est un monomorphisme. On a donc prouvé que $f = m \circ e$ avec m monomorphisme et $e = \operatorname{coker}(\ker(f))$. Il reste à montrer que $m = \ker(\operatorname{coker}(f))$.

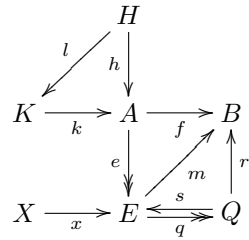


Diagramme 15: Factorisation par l'image : Preuve que m est un monomorphisme

Maintenant, e est un épimorphisme et donc pour tout $t : B \rightarrow N$, $t \circ f = \mathbf{0}$ si et seulement si $t \circ m = \mathbf{0}$. Par la proposition 3.11 page 21, on obtient

$$\operatorname{coker}(f) = \operatorname{coker}(m).$$

Or, m est un monomorphisme donc un noyau par l'axiome **(A6)**, et par le lemme 3.21,

$$m = \ker(\operatorname{coker}(m)) = \ker(\operatorname{coker}(f)).$$

- (ii) Soit $q = \text{coker}(f')$. On a alors $\mathbf{0} = q \circ f' \circ s = q \circ h \circ m \circ e$ et donc $q \circ h \circ m = \mathbf{0}$. Par conséquent, il existe un unique k tel que $h \circ m = \ker(q) \circ k$. Or, comme dans la partie (i),

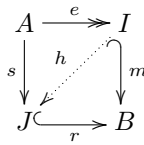
$$\ker(\text{coker}(f')) = \ker(\text{coker}(m')) = m'.$$

Il reste à montrer que le diagramme commute, c'est à dire que $e' \circ s = k \circ e$. Or, on a que $h \circ m \circ e = m' \circ e' \circ s$ et donc $h \circ m = \ker(q) \circ k = m' \circ k$ implique $m' \circ k \circ e = m' \circ e' \circ s$, et on a le résultat du fait que m' est un monomorphisme.

□

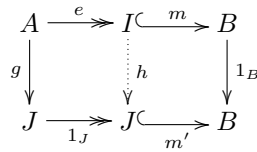
Proposition 3.23

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme, $I \in \mathcal{A}$, $m : I \hookrightarrow B$, $e : A \twoheadrightarrow I$ tel que $m \circ e$ soit la factorisation de f par l'image, et $r : J \hookrightarrow B$, $s : A \rightarrow J$ tel que $r \circ s$ soit une autre factorisation de f . Alors il existe un unique morphisme $h : I \rightarrow J$ telle que le diagramme suivant commute :



Démonstration.

Reprenons les mêmes notations que dans l'énoncé et appliquons la proposition 3.22 (ii) au diagramme ci-dessous. On obtient ainsi l'existence d'un unique morphisme $h : I \rightarrow J$ tel que le diagramme commute.



Le résultat s'ensuit alors par composition avec les identités.

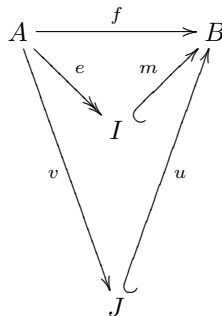
□

Proposition 3.24

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'une catégorie abélienne \mathcal{A} . Par la proposition 3.22 page 25, il existe un objet $C \in \mathcal{A}$ ainsi qu'un monomorphisme $m : I \hookrightarrow B$ et un épimorphisme $e : A \twoheadrightarrow I$. Alors m est l'image de f .

Démonstration.

Soit un triple (J, v, u) où J est un objet de \mathcal{C} , v un morphisme de A vers J et u un monomorphisme de J vers B tel que $f = u \circ v$. Il faut montrer qu'il existe un unique morphisme $h : I \rightarrow J$ faisant commuter le diagramme suivant :



En appliquant la proposition 3.23, page 27, on obtient l'existence et l'unicité du morphisme h voulu. \square

Corollaire 3.25

Dans une catégorie abélienne, l'image d'un morphisme existe toujours.

Démonstration.

Découle directement de la proposition 3.22 et de la proposition précédente. \square

3.5 Suite exacte

Le concept de suite exacte, essentiel dans les lemmes de diagrammes, est bien défini dans les catégories abéliennes, où l'existence de l'image et du noyau de chaque morphisme est assurée.

Définition 3.26 (Suite exacte)

(i) Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne et deux morphismes composables f et g . Alors

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

est appelée suite exacte si $\text{im } f = \ker g$.

(ii) De manière plus générale, une suite de morphismes, finie ou infinie,

$$\cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+2} \cdots$$

est dite exacte si chaque paire de morphismes consécutifs est exacte.

Proposition 3.27

Dans une catégorie abélienne, soit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{h} & C \\
 \searrow e & & \nearrow m & & \nearrow n \\
 & & I & & J
 \end{array}$$

où (e, m) et (f, n) sont les factorisations par l'image de g et h , respectivement. Alors, on a l'équivalence suivante :

- (i) (g, h) est une suite exacte ;
- (ii) (m, f) est une suite exacte.

Démonstration.

Remarquons d'abord que puisque n est un monomorphisme, $\ker(h) = \ker(f)$ (proposition 3.11, page 21). On a aussi que $\text{im}(f) = \ker(m) = \text{im}(g)$. Ainsi, l'égalité $\ker(g) = \text{im}(f)$ est équivalente à l'égalité $\ker(g) = \text{im}(f) = \ker(m)$. \square

Proposition 3.28 (Autodualité de la notion de suite exacte)

Dans une catégorie abélienne, la notion de suite exacte est autoduale, c'est-à-dire que si (f, g) est une suite exacte dans une catégorie abélienne, alors (g^*, f^*) est exacte dans \mathcal{A}^* , et réciproquement.

Démonstration.

Dans une catégorie abélienne \mathcal{A} , reprenons les morphismes f et g ainsi que leur décomposition comme dans la proposition 3.27. Supposons que la suite (h^*, g^*) soit exacte dans \mathcal{A}^* . Par la proposition précédente, cela implique que l'image de h^* , qui est f^* soit égale à $\ker(m)$ dans \mathcal{A} , et donc que $f = \text{coker}(m)$ dans \mathcal{A} . Par conséquent,

$\ker(f) = \ker(\text{coker}(m))$. Puisque, dans une catégorie abélienne, tous les monomorphismes sont des noyaux, on obtient, par le lemme 3.21, que $\ker(\text{coker}(m)) = m$, et donc que $\ker(f) = m$, ce qui implique que la suite (g, h) est exacte dans \mathcal{A} .

Réciproquement, si la suite (g, h) est exacte dans \mathcal{A} , la suite (h^*, g^*) est exacte dans \mathcal{A}^* par ce que l'on a fait avant et par le principe de dualité. \square

Proposition 3.29

On a les équivalences suivantes :

(i) $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ est une suite exacte si et seulement si f est un monomorphisme ;

(ii) $B \xrightarrow{f} A \longrightarrow \mathbf{0}$ est une suite exacte si et seulement si f est un épimorphisme.

Démonstration.

(i) On sait que $(\mathbf{0}, f)$ est une suite exacte si et seulement si $\ker(f) = \text{im}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ce qui est le cas si et seulement si f est un monomorphisme (voir point (i) de la proposition 3.19).

(ii) Découle du point précédent et du principe de dualité. \square

3.6 Préliminaires à la chasse dans les diagrammes

3.6.1 Pseudo-éléments

Considérons la proposition suivante :

Lemme 3.30 (Lemme des 5 (première version))

Dans la catégorie \mathbf{Ab} , considérons le diagramme commutatif suivant, dans lequel les deux lignes sont des suites exactes. Si ϵ, ζ, θ et λ sont des isomorphismes de groupes, alors η est un isomorphisme de groupe :

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & D & \xrightarrow{\delta} & E \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \zeta & & \downarrow \eta & & \downarrow \theta & & \downarrow \lambda \\ F & \xrightarrow{\mu} & G & \xrightarrow{\nu} & H & \xrightarrow{\xi} & I & \xrightarrow{\pi} & J \end{array}$$

Diagramme 16: Lemme des 5 (première version)

Pour prouver, dans un premier temps, que η est injectif, on pourrait se donner un élément $x \in C$ tel que $\eta(x) = 0$ et montrer ensuite que $x = 0$. Cette manière de procéder fonctionne si les objets de la catégorie sont des ensembles dans lesquels on peut choisir des éléments, par exemple ses groupes, ses espaces vectoriels, les modules, ... Puisque l'on ne peut pas garantir cette propriété dans toute catégorie abélienne, on va travailler avec des pseudo-éléments, introduits dans la définition suivante.

Définition 3.31 (Pseudo-élément, pseudo-égalité et pseudo-image)

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne, $A \in \mathcal{C}$ et un morphisme $f : A \rightarrow B$.

(i) Un pseudo-élément de A est un morphisme $\bullet \xrightarrow{a} A$ (avec codomaine A), où \bullet est un objet quelconque. On écrit alors $a \in^* A$.

(ii) Deux pseudo-éléments $X \xrightarrow{a} A$ et $X' \xrightarrow{a'} A$ sont dits pseudo-égaux, ce que l'on note $a =^* a'$, s'il existe des épimorphismes p et p' tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{p} & X \\
 \downarrow p' & & \downarrow a \\
 X' & \xrightarrow{a'} & A
 \end{array}$$

Diagramme 17: Pseudo-égalité

- (iii) La pseudo-image d'un pseudo-élément $\bullet \xrightarrow{a} A$ par f est la composition $f \circ a$, que l'on note aussi $f(a)$.

Exemple 3.32

Dans certains cas, il est facile de mettre en relation les éléments d'un groupe abélien avec ceux d'un ensemble de morphismes. C'est notamment le cas si le domaine de ces morphismes est \mathbb{Z} . En effet, un homomorphisme f de \mathbb{Z} dans un groupe abélien $G = (A, \star)$ est entièrement déterminé par l'image de 1 : si on pose, pour $a \in G$, $f(1) = a$, on a :

$$\begin{aligned}
 f(m) \star f(n) &= \underbrace{(a \star a \star \dots \star a)}_m \star \underbrace{(a \star a \star \dots \star a)}_n \\
 &= \underbrace{a \star a \star \dots \star a}_{m+n} = f(m+n),
 \end{aligned}$$

et donc f est bien un homomorphisme de groupes. En fait, il est facile de montrer que A est isomorphe (en tant qu'ensemble) à $\text{hom}(\mathbb{Z}, A)$: à chaque élément du groupe on assigne l'homomorphisme défini ci-dessus.

3.6.2 Propriétés des pseudo-éléments et de la pseudo-égalité

Proposition 3.33

La pseudo-égalité est une relation d'équivalence sur les pseudo-éléments d'un objet A .

Démonstration.

Nous utilisons ici les notations de la définition 3.31.

- (i) La réflexivité et la symétrie sont immédiates.
- (ii) Montrons maintenant la transitivité. Soient $a, a', a'' \in^* A$ tels que $a =^* a'$ et $a' =^* a''$. Par définition de la pseudo-égalité, il existe des épimorphismes p, p', p'' et p''' tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bullet & & \\
 & \swarrow q & & \searrow q' & \\
 \bullet & \xrightarrow{p'} & \bullet & \xleftarrow{p''} & \bullet \\
 \downarrow p & & \downarrow a' & & \downarrow p''' \\
 \bullet & \xrightarrow{a} & A & \xleftarrow{a''} & \bullet
 \end{array}$$

Diagramme 18: Transitivité de la relation de pseudo-égalité

En prenant le pullback, qui existe toujours dans une catégorie abélienne, des morphismes p' et p'' , on a l'existence de morphismes q et q' tels que $p' \circ q = p'' \circ q'$. Puisque, dans une catégorie abélienne, le pullback d'un épimorphisme est un épimorphisme (voir 3.20 page 24), on a que q et q' sont des épimorphismes. Ainsi, $p \circ q$ et $p''' \circ q'$ sont des épimorphismes tels que $a \circ p \circ q = a'' \circ p''' \circ q'$, ce qui implique que $a =^* a''$.

□

Pour un objet A d'une catégorie abélienne, il peut exister plusieurs morphismes $\mathbf{0} \in^* A$, chacun avec un domaine différent. La proposition suivante montre que ces différents pseudo-éléments sont tous pseudo-égaux entre eux. Pour un morphisme f ayant pour domaine A , cela permettra de faire le lien entre $f = \mathbf{0}$ et $f(a) =^* \mathbf{0}$ pour tout $a \in^* A$.

Proposition 3.34

Soit A un objet d'une catégorie abélienne. Alors il existe une classe d'équivalence pour la relation de pseudo-égalité établie sur les pseudo-éléments de A constituée d'exactlyment tous les morphismes $\mathbf{0}$ avec codomaine A .

Démonstration.

Soit $a \in^* A$ et un morphisme zéro $\mathbf{0}_{(B,A)} : B \rightarrow A$ tels que $a =^* \mathbf{0}_{(B,A)}$. Alors il existe un objet C et des épimorphismes $c_1 : C \rightarrow B$, $c_2 : C \rightarrow \text{codom}(a)$ tels que $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{(B,A)} \circ c_1 = a \circ c_2$. Ainsi, puisque c_2 est un épimorphisme, $a = \mathbf{0}$.

Par conséquent, la classe d'un morphisme zéro de codomaine A ne contient que des morphismes zéro de codomaine A .

Montrons maintenant que les morphismes zéros de même codomaine sont pseudo-égaux. Soient donc deux morphismes zéros, $\mathbf{0}_{(B,A)} : B \rightarrow A$ et $\mathbf{0}_{(C,A)} : C \rightarrow A$. Utilisons l'axiome **(A4)** pour construire $(B \times C, p_B, p_C)$ le produit de B et de C . Pour montrer que p_B et p_C sont des épimorphismes, il suffit de montrer le résultat pour p_B , puisque la situation est symétrique. Considérons le triple $(B, 1_B, \mathbf{0}_{(B,C)})$. Alors la définition de produit nous donne l'existence d'un morphisme $d : B \rightarrow B \times C$ tel que $p_B \circ d = 1_B$. Par conséquent $p_B \circ d$ est un épimorphisme, et par la proposition 2.22 page 11, on obtient que p_B est en aussi un. Ainsi, le couple d'épimorphismes (p_B, p_C) donne la pseudo-égalité recherchée. □

Proposition 3.35 (Pseudo-éléments et morphisme zéro)

Dans toute catégorie abélienne \mathcal{C} , on a les équivalences suivantes :

- (i) $f : A \rightarrow B$ est un morphisme zéro ;
- (ii) pour tout $a \in^* A$, $f(a) =^* \mathbf{0}$;

Démonstration.

Supposons que $f = \mathbf{0}$. Alors $f(a) = f \circ a = \mathbf{0}$, et donc, par la proposition précédente, $f(a) =^* \mathbf{0}$.

Réciproquement, supposons que $f(a) = \mathbf{0}$ pour tout $a \in^* A$, on a donc $f = f(1_A) =^* \mathbf{0}$, ce qui implique, à nouveau par la proposition précédente, que $f = \mathbf{0}$. □

Proposition 3.36 (Pseudo-éléments et monomorphismes)

Dans toute catégorie abélienne \mathcal{C} , on a les équivalences suivantes :

- (i) $f : A \rightarrow B$ est un monomorphisme ;
- (ii) pour tous $a, a' \in^* A$, $f(a) =^* f(a') \Rightarrow a =^* a'$;
- (iii) pour tout $a \in^* A$, $f(a) =^* \mathbf{0} \Rightarrow a =^* \mathbf{0}$.

Démonstration.

(i) \Rightarrow (ii) Supposons que f soit un monomorphisme et soient $a, a' \in^* A$ tels que $f(a) =^* f(a')$. Ainsi, par définition, il existe p et p' , des épimorphismes, tels que $f \circ a \circ p = f \circ a' \circ p'$. Puisque f est un monomorphisme, on a $a \circ p = a' \circ p'$, et donc $a =^* a'$.

(ii) \Rightarrow (iii) Supposons maintenant que la condition (ii) soit satisfaite. Alors, (iii) est satisfaite comme cas particulier en prenant $a' = \mathbf{0}$.

(iii) \Rightarrow (i) Cela provient du point (ii) de la proposition 3.19 et de la proposition 3.34. □

Proposition 3.37 (Pseudo-éléments et épimorphismes)

Dans toute catégorie abélienne \mathcal{C} , on a les équivalences suivantes :

- (i) $f : A \rightarrow B$ est un épimorphisme ;
- (ii) pour tout $b \in {}^* B$, il existe $a \in {}^* A$ tel que $f(a) = {}^* b$.

Démonstration.

- (i) \Rightarrow (ii) Supposons que f soit un épimorphisme et soit $b \in {}^* B$. Soit maintenant (a, f') le pullback de (b, f) . Puisque f est un épimorphisme, f' l'est aussi par la proposition 3.20 page 24. On a ainsi le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & \bullet \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Diagramme 19: Pseudo-éléments et épimorphismes

Ainsi, on a que $b \circ f' = f \circ a = f \circ a \circ 1_X$, et donc que $f(a) = {}^* b$.

- (ii) \Rightarrow (i) Soit maintenant un morphisme f satisfaisant la condition (ii). Il existe donc $a \in {}^* A$ tel que $f(a) = {}^* 1_B$, ce qui implique l'existence de deux épimorphismes p et p' tels que $f \circ a \circ p = 1_B \circ p'$. Par la proposition 2.22 page 11, puisque le membre de droite est un épimorphisme, f l'est aussi. \square

Proposition 3.38 (Pseudo-éléments et suites exactes)

Dans toute catégorie abélienne \mathcal{C} , on a les équivalences suivantes :

- (i) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est une suite exacte ;
- (ii) pour tout $a \in {}^* A$, $g(f(a)) = {}^* \mathbf{0}$ et pour tout $b \in {}^* B$ tel que $g(b) = {}^* \mathbf{0}$ il existe $a \in {}^* A$ tel que $f(a) = {}^* b$.

Démonstration.

- (i) \Rightarrow (ii) Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ une suite exacte. Soit $m \circ e$ la factorisation en image de f donnée par la proposition 3.22. Puisque la suite est exacte, l'image m de f est le noyau de g . Ainsi, $g \circ m = \mathbf{0}$, ce qui implique que $\mathbf{0} = \mathbf{0} \circ e = g \circ m \circ e = g \circ f$ et donc $g(f(a)) = {}^* \mathbf{0}$ pour tout $a \in {}^* A$.

Soit maintenant $b \in {}^* B$, tel que $g(b) = {}^* \mathbf{0}$. On aimerait montrer qu'il existe $a \in {}^* A$ tel que $f(a) = {}^* b$. Pour la suite, les domaines et codomaines des différents morphismes ne seront pas donnés explicitement, mais ils apparaissent dans le diagramme 21. De nouveau, on va utiliser la factorisation $m \circ e$ de f , où, puisque la suite est exacte, l'image m de f est égale au noyau de g . Par définition du noyau, puisque $g \circ b = \mathbf{0}$, on a l'existence d'un morphisme c tel que $b = m \circ c$.

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{q} & X & & & & \\ a \downarrow & & \downarrow c & \searrow b & & & \\ A & \xrightarrow{e} & I & \xrightarrow{m} & B & \xrightarrow{g} & C. \\ & & \searrow f & & & & \end{array}$$

Diagramme 20: Pseudo-éléments et suites exactes (1)

Soit (a, q) le pullback, qui existe toujours dans une catégorie abélienne, des morphismes (c, e) . On a donc $c \circ q = e \circ a$, et donc, $m \circ c \circ q = m \circ e \circ a$, ce qui

implique que $f \circ a \circ 1_Y = f \circ a = b \circ q$. Puisque e est un épimorphisme et que le pullback d'un épimorphisme l'est aussi (voir 3.20 page 24), on a que $f \circ a =^* b$.

(ii) \Rightarrow (i) Pour la preuve, nous utiliserons le diagramme 22. Nous allons, à nouveau, utiliser la factorisation en image $m \circ e$ de f . Il faut donc montrer que $\ker g = m$. Par hypothèse, on sait que pour tout $a \in^* A$, on a que $g(f(a)) =^* \mathbf{0}$. En utilisant la proposition 3.35, on déduit que $g \circ f = \mathbf{0}$. Puisque $f = m \circ e$, avec e épimorphisme, on a que $g \circ m = \mathbf{0}$. Pour montrer que m est effectivement le noyau de g , il faut montrer que pour tout morphisme b tel que $g \circ b = \mathbf{0}$, il existe un unique morphisme r avec $m \circ r = b$.

Soit donc $b \in^* B$ avec $g(b) =^* \mathbf{0}$. Par hypothèse, il existe $a \in^* A$ tel que $f(a) =^* b$ et donc, par définition de la pseudo-égalité, des épimorphismes p et q tels que $m \circ e \circ a \circ p = b \circ q$.

Soit maintenant le pullback (n, b') de (m, b) . Par définition du pullback, puisque $m \circ e \circ a \circ p = b \circ q$, il existe un unique morphisme z tel que $n \circ z = q$ et $b' \circ z = e \circ a \circ p$. Puisque q est un épimorphisme et que $n \circ z = q$, on obtient que n est un épimorphisme (voir proposition 2.22 page 11); de plus, par la proposition 2.45, on sait que n est un monomorphisme et donc, par la proposition 3.19 point iv, n est un isomorphisme, il admet donc un inverse n^{-1} . Puisque l'on avait $b \circ n = m \circ b'$, on obtient que $b = m \circ b' \circ n^{-1}$. Il reste à montrer l'unicité d'un tel morphisme. Si t est un morphisme tel que $b = m \circ t$, on aura $m \circ b' \circ n^{-1} = m \circ t$ et donc $b' \circ n^{-1} = t$, puisque m est un monomorphisme.

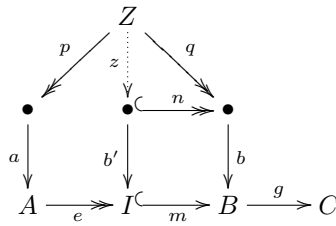


Diagramme 21: Pseudo-éléments et suites exactes (2)

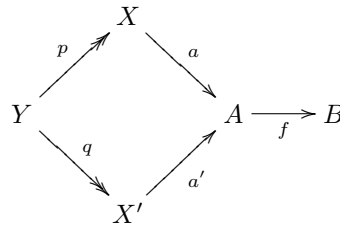
□

Proposition 3.39

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme. S'il existe $a, a' \in^* A$ tels que $f(a) =^* f(a')$, alors il existe $a'' \in^* A$ tel que $f(a'') =^* \mathbf{0}$ et pour tout morphisme $g : A \rightarrow C$ avec $g(a') =^* \mathbf{0}$, on a $g(a'') =^* g(a)$.

Démonstration.

Soient $a, a' \in^* A$ tels que $f(a) =^* f(a')$. Il existe donc des morphismes p et q tels que la diagramme suivant commute :



On pose alors $a'' = a \circ p - a' \circ q$. En utilisant **(A2)**, on a que $f(a'') =^* \mathbf{0}$. Si g est tel que $g(a') =^* \mathbf{0}$, on a, par le même argument, $g(a'') = g \circ a \circ p - g \circ a' \circ q$, et donc, puisque $g(a') =^* \mathbf{0}$, $g(a'') = g \circ a \circ p$, et, finalement, $g(a'') =^* g(a)$. □

Avant de passer aux lemmes de diagrammes, nous aimerions souligner l'usage des axiomes des catégories abéliennes dans les résultats obtenus. Les axiomes **(A3)** et **(A5)** servent à assurer l'existence des noyaux et conoyaux, qui sont ensuite très largement utilisés. Par ailleurs les axiomes **(A1)**, **(A2)** et **(A4)** sont nécessaires pour prouver les règles de chasse dans les diagrammes, tandis que l'axiome **(A6)** intervient dans la preuve de l'existence de l'image, et assure le bon comportement des isomorphismes (voir 3.19 page 23), que l'on utilise pour prouver le lemme des 5. Ainsi, l'intégralité des axiomes sont utilisés et l'on peut donc affirmer que les catégories abéliennes sont le bon contexte pour aborder les résultats qui vont suivre.

4 Lemmes de Diagrammes

Les lemmes de diagrammes sont des outils très utilisés en algèbre homologique et en topologie algébrique, par exemple le lemme des 5, présenté ci-dessous, permet de trouver des isomorphismes entre structures algébriques.

4.1 Lemme des 5

Lemme 4.1 (Lemme des 4)

Dans une catégorie abélienne, considérons le diagramme commutatif ci-dessous, dans lequel les deux lignes sont des suites exactes. Si ϵ est un épimorphisme et si ζ et θ sont des monomorphismes, alors η est un monomorphisme.

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & D \\
 \downarrow \epsilon & & \downarrow \zeta & & \downarrow \eta & & \downarrow \theta \\
 F & \xrightarrow{\mu} & G & \xrightarrow{\nu} & H & \xrightarrow{\xi} & I
 \end{array}$$

Diagramme 22: Lemme des 4

Démonstration.

Durant la preuve, les propositions 3.35 à 3.38 seront utilisées sans mention explicite. Pour montrer que η est un monomorphisme, on veut montrer que pour tout $c \in {}^* C$ tel que $\eta(c) = {}^* \mathbf{0}$ on a $c = {}^* \mathbf{0}$. Soit donc $c \in {}^* C$ tel que $\eta(c) = {}^* \mathbf{0}$. Composant avec ξ , on aura que $\eta \circ \xi(c) = {}^* \mathbf{0}$. En utilisant la commutativité du diagramme, on obtient que $\mathbf{0} = {}^* \xi \circ \eta(c) = {}^* \theta \circ \gamma(c)$, ce qui implique que $\gamma(c) = {}^* \mathbf{0}$, puisque θ est un monomorphisme.

La suite $B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D$ étant exacte, il existe $b \in {}^* B$ tel que $\beta(b) = {}^* c$. Grâce à la commutativité du diagramme, on a l'égalité $\nu \circ \zeta(b) = {}^* \eta \circ \beta(b) = {}^* \eta(c) = {}^* \mathbf{0}$. En utilisant le fait que la suite $F \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\nu} H$ est exacte, on obtient qu'il existe $f \in {}^* F$ tel que $\mu(f) = {}^* \zeta(b)$. Puisque ϵ est un épimorphisme, il existe $a \in {}^* A$ tel que $\epsilon(a) = {}^* f$. On a donc, $\zeta \circ \alpha(a) = {}^* \mu \circ \epsilon(a) = {}^* \mu(f) = {}^* \zeta(b)$, ce qui implique, puisque ζ est un monomorphisme, que $\alpha(a) = {}^* b$.

En reprenant ce que l'on avait trouvé plus haut et en utilisant le fait que la suite $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ est exacte, on trouve que $c = {}^* \beta(b) = \beta \circ \alpha(a) = {}^* \mathbf{0}$. \square

Lemme 4.2 (Lemme des 5)

Dans une catégorie abélienne, considérons le diagramme commutatif ci-dessous, dans lequel les deux lignes sont des suites exactes. Si ϵ, ζ, θ et λ sont des isomorphismes, alors η est un isomorphisme.

Démonstration.

Par la proposition 3.19 page 23, il suffit de montrer que η est un monomorphisme et un épimorphisme.

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & D & \xrightarrow{\delta} & E \\
\downarrow \epsilon & & \downarrow \zeta & & \downarrow \eta & & \downarrow \theta & & \downarrow \lambda \\
F & \xrightarrow{\mu} & G & \xrightarrow{\nu} & H & \xrightarrow{\xi} & I & \xrightarrow{\pi} & J
\end{array}$$

Diagramme 23: Lemme des 5

- (i) En appliquant le lemme des 5 au diagramme 24, privé des objets E et J et des morphismes correspondants, on a que η est un monomorphisme.
- (ii) Grâce au principe de dualité et au lemme des 4 appliqué au diagramme 24, privé des objets A et F , on obtient que η est un épimorphisme.

□

4.2 Lemme du serpent

En vue d'établir le lemme du serpent, nous allons commencer par le lemme du noyau. Il s'avérera très utile par la suite.

Lemme 4.3 (Lemme du noyau)

Dans une catégorie abélienne, considérons le diagramme ci-dessous, dans lequel les deux lignes (ζ, η) , $(\mathbf{0}, \nu, \xi)$ sont exactes, les carrés (1) et (2) commutent et les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\gamma = \ker(\theta), \quad \delta = \ker(\lambda), \quad \epsilon = \ker(\mu).$$

Alors, il existe des morphismes uniques α, β tels que le diagramme entier commute. De plus, le couple (α, β) forme une suite exacte.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & & \\
\downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon & & \\
D & \xrightarrow{\zeta} & E & \xrightarrow{\eta} & F & & \\
\downarrow \theta & (1) & \downarrow \lambda & (2) & \downarrow \mu & & \\
\mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} & G & \xrightarrow{\nu} & H & \xrightarrow{\xi} & I & \\
& & & & & &
\end{array}$$

Diagramme 24: Lemme du noyau

Démonstration.

- (i) Dans un premier temps, montrons l'existence des morphismes α et β .

On commence par s'intéresser aux colonnes 1 et 2. Puisque $\gamma = \ker(\theta)$, et que le carré (1) commute, on a $\lambda \circ \zeta \circ \gamma = \nu \circ \theta \circ \gamma = \nu \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Puisque $\delta = \ker(\lambda)$, il existe un unique morphisme $\alpha : A \rightarrow B$ tel que $\zeta \circ \gamma = \delta \circ \alpha$. On procède de la même façon sur les colonnes 2 et 3 pour obtenir l'existence et l'unicité de $\beta : B \rightarrow C$ qui est tel que $\eta \circ \delta = \epsilon \circ \beta$. Le diagramme complet est alors commutatif.

- (ii) Il reste à montrer que (α, β) forme une suite exacte.

Pour cela, nous allons utiliser la proposition 3.38 page 32. Par la commutativité, on a $\epsilon \circ \beta \circ \alpha = \eta \circ \zeta \circ \gamma$. Or, (ζ, η) est une suite exacte et donc $\eta \circ \zeta = \mathbf{0}$. Ainsi, $\epsilon \circ \beta \circ \alpha = \mathbf{0}$ et puisque ϵ est un noyau, c'est un monomorphisme et donc

$$\beta \circ \alpha = \mathbf{0}.$$

Il reste à montrer que pour tout $b \in {}^* B$ tel que $\beta(b) = {}^* \mathbf{0}$, il existe $a \in {}^* A$ tel que $\alpha(a) = {}^* b$.

Soit donc $b \in {}^* B$ tel que $\beta(b) = {}^* \mathbf{0}$. On a $\eta \circ \delta(b) = \epsilon \circ \beta(b) = \mathbf{0}$. Par conséquent, puisque (ζ, η) est une suite exacte, on obtient l'existence de $d \in {}^* D$ tel que $\zeta(d) = {}^* \delta(b)$. Par la commutativité, puisque $\lambda \circ \delta = \mathbf{0}$, il vient que $\mathbf{0} = \lambda \circ \delta(b) = {}^* \lambda \circ \zeta(d) = \nu \circ \theta(d)$, et donc $\nu \circ \theta(d) = \mathbf{0}$. Or, par la proposition 3.29 page 29, ν est un monomorphisme et donc $\theta(d) = \mathbf{0}$. Si l'on note $X = \text{dom}(d)$, le fait $\gamma = \ker(\theta)$ implique l'existence de $a : X \rightarrow A$ tel que $\gamma \circ a = d$. Par la commutativité, on obtient,

$$\delta \circ \alpha(a) = \zeta \circ \gamma(a) = \zeta(d) = {}^* \delta(b).$$

Puisque δ est un noyau, c'est un monomorphisme. En utilisant la proposition 3.36 page 31, on obtient $\alpha(a) = {}^* b$, le résultat désiré. \square

Lemme 4.4 (Lemme du serpent)

Dans une catégorie abélienne, considérons le diagramme ci-dessous, dans lequel les deux lignes (ζ, η) , $(\mathbf{0}, \nu, \xi)$ sont exactes,

$$\gamma = \ker(\theta), \quad \delta = \ker(\lambda), \quad \epsilon = \ker(\mu),$$

$$\pi = \text{coker}(\theta), \quad \rho = \text{coker}(\lambda), \quad \sigma = \text{coker}(\mu),$$

et les carrés (1) et (2) commutent. Alors, il existe des morphismes $\alpha, \beta, \tau, \varphi$ uniques tels que le diagramme entier commute et un unique morphisme ω tel que la suite $(\alpha, \beta, \omega, \tau, \varphi)$ soit exacte.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \xrightarrow{\omega} \\
 & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\
 & & D & \xrightarrow{\zeta} & E & \xrightarrow{\eta} & F \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \theta & & \downarrow \lambda & & \downarrow \mu \\
 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\nu} & H & \xrightarrow{\xi} & I \\
 & & \downarrow \pi & & \downarrow \rho & & \downarrow \sigma \\
 & & J & \xrightarrow{\tau} & K & \xrightarrow{\varphi} & L \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Diagramme 25: Lemme du serpent

Démonstration.

- (i) On remarque d'abord que le lemme du noyau nous donne l'existence et l'unicité des morphismes α, β tels que $\zeta \circ \gamma = \delta \circ \alpha$, $\eta \circ \delta = \epsilon \circ \beta$ et le couple (α, β) forme une suite exacte. Puisque le dual du noyau est le conoyau, par le dual du lemme du noyau, on obtient l'existence et l'unicité des morphismes τ, φ tel que le diagramme entier commute. On obtient aussi que (τ, φ) forme une suite exacte.
- (ii) Construisons maintenant $\omega : C \rightarrow J$. Pour cela, on se réfère d'abord au diagramme 27. Chacun des morphismes ζ, ξ , peut se factoriser à travers son image, respectivement I_ζ, I_ξ , par la proposition 3.22 page 25. On note $(\zeta_1, \zeta_2), (\xi_1, \xi_2)$,

ces décompositions. La deuxième partie de cette même proposition nous donne l'existence des morphismes $g : I_\zeta \longrightarrow G$ et $f : I_\xi \longrightarrow F$ qui font commuter le diagramme. Posons

$$(R, r) = \ker(g), \quad (\tilde{R}, \tilde{r}) = \ker(f), \quad (Q, q) = \operatorname{coker}(g), \quad (\tilde{Q}, \tilde{q}) = \operatorname{coker}(f),$$

et cherchons des factorisation de $\alpha, \beta, \tau, \varphi$ à travers $R, \tilde{R}, Q, \tilde{Q}$. On va le faire pour α , les autres cas étant traités similairement ou dualement.

En fait il suffit d'appliquer la partie existence de la preuve du lemme du noyau, sur le sous-diagramme constitué des objets qui sont dans le carré 3×3 supérieur gauche. Appelons α_1, α_2 les morphismes ainsi obtenus. Par la commutativité, on a $\delta \circ \alpha_2 \circ \alpha_1 = \delta \circ \alpha$ et puisque δ est un monomorphisme, $\alpha_2 \circ \alpha_1 = \alpha$. En utilisant la commutativité, on remarque que α_2, β_2 sont des monomorphismes et que τ_1, φ_1 sont des épimorphismes.

On va montrer maintenant que β_2 et τ_1 sont des isomorphismes, et cela nous permettra de construire simplement un morphisme $\tilde{\omega} : \tilde{R} \longrightarrow Q$ (voir point iii). Ce morphisme $\tilde{\omega}$ nous permettra de définir $\omega := \tau_1^{-1} \circ \tilde{\omega} \circ \beta_2^{-1}$. Nous allons le faire uniquement pour β_2 , le résultat étant déduit pour τ_1 par dualité. Pour cela, en utilisant la proposition 3.19 page 23, il suffit de montrer que β_2 est un épimorphisme. Dans ce but, on va utiliser la proposition 3.37 page 32 et montrer que pour tout $c \in {}^* C$, il existe $u \in {}^* \tilde{R}$ tel que $\beta_2(u) = {}^* c$. Soit donc $c \in {}^* C$, on a alors

$$\xi_2 \circ f \circ \epsilon(c) = \mu \circ \epsilon(c) = \mathbf{0},$$

et, puisque ξ_2 est un monomorphisme et que $\tilde{r} = \ker(f)$, il existe $u : \operatorname{dom}(c) \longrightarrow \tilde{R}$ tel que $\tilde{r}(u) = \epsilon(c)$. Or, par la commutativité, $\tilde{r}(u) = \epsilon \circ \beta_2(u)$, et donc puisque ϵ est un monomorphisme, on obtient $\beta_2(u) = {}^* c$. Par conséquent β_2 est un épimorphisme et donc un isomorphisme.

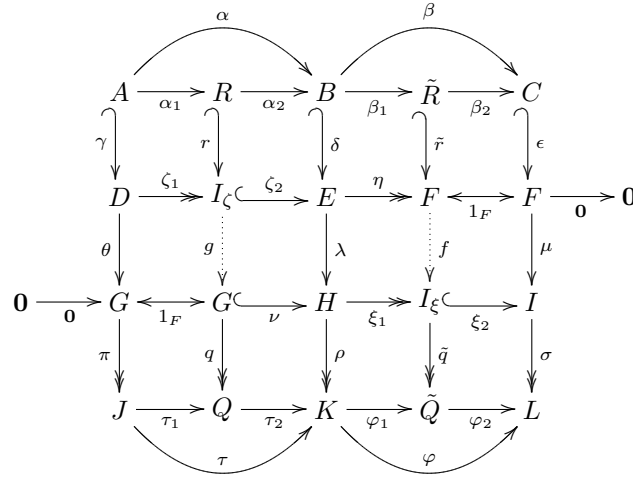


Diagramme 26: Lemme du serpent : construction du morphisme de connexion (1)

- (iii) Construisons maintenant $\tilde{\omega} : \tilde{R} \longrightarrow Q$. Pour cela on se réfère au diagramme 28. Considérons (P, p, p') le pullback de (η, \tilde{r}) et (S, s, s') le pushout de (ν, q) . Par les propositions 2.45 page 18 et 3.20 page 24, on obtient que p, s' sont des épimorphismes et p', s sont des monomorphismes. Soit encore $(\Psi, \psi) = \ker(p)$, $(X, x) = \operatorname{coker}(s)$.

Puisque $\eta \circ p' \circ \psi = \tilde{r} \circ p \circ \psi = \mathbf{0}$ et que $\zeta_2 = \ker(\eta)$, il existe un morphisme $\Xi : \Psi \longrightarrow I_\zeta$ qui fait commuter le diagramme. On construit le morphisme $\Upsilon : I_\xi \longrightarrow X$ de façon duale.

On remarque que puisque p est un épimorphisme, par l'axiome **(A6)** et le dual

du lemme 3.21 page 25, $\text{coker}(\psi) = \text{coker}(\ker(p)) = p$. Ainsi, puisque

$$s' \circ \lambda \circ p' \circ \psi = s \circ q \circ g \circ \Xi = s \circ \mathbf{0} \circ \Xi = \mathbf{0},$$

il existe un morphisme $\tilde{\omega}_1 : \tilde{R} \rightarrow S$ tel que $\tilde{\omega}_1 \circ p = s' \circ \lambda \circ p'$. Par conséquent

$$x \circ \tilde{\omega}_1 \circ p = x \circ s' \circ \lambda \circ p' = \Upsilon \circ f \circ \tilde{r} \circ p = \Upsilon \circ \mathbf{0} \circ p = \mathbf{0},$$

et donc $x \circ \tilde{\omega}_1 = \mathbf{0}$ car p est un épimorphisme. Or, par le lemme 3.21 page 25, $\ker(x) = \ker(\text{coker}(s)) = s$, ainsi il existe un morphisme $\tilde{\omega} : \tilde{R} \rightarrow Q$, qui fait commuter le diagramme 28. Puisque dans le diagramme 27, les trois colonnes centrales sont exactes. Ainsi l'ajout du morphisme $\tilde{\omega}$ laisse ce diagramme commutatif.

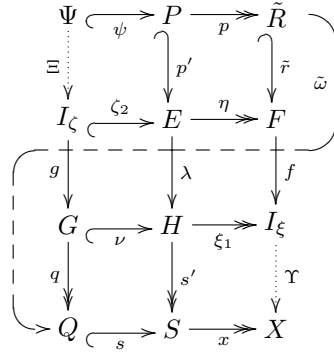


Diagramme 27: Lemme du serpent : construction du morphisme de connexion (2)

- (iv) Montrons maintenant que $\omega = \tau_1^{-1} \circ \tilde{\omega} \circ \beta_2^{-1}$ est tel que les suites (β, ω) et (ω, τ) sont exactes. Par dualité, il suffit de prouver que (β, ω) est une suite exacte. Pour cela, on va montrer que $(\beta_1, \tilde{\omega})$ est une suite exacte.

Etudions l'action de $\tilde{\omega}$ sur les pseudo-éléments de \tilde{R} . Soit donc $c \in {}^* \tilde{R}$. Alors $\tilde{r}(c) \in {}^* F$ et du fait que η est un épimorphisme et de la proposition 3.37 page 32, on obtient un morphisme $e \in {}^* E$ tel que $\eta(e) = {}^* \tilde{r}(c)$. Par la proposition 3.27 page 28, on voit que (ν, ξ_1) forme une suite exacte. On remarque de plus que

$$\xi_1 \circ \lambda(e) = {}^* \mu \circ \eta(e) = {}^* \mu \circ \eta \circ \tilde{r}(c) = \mathbf{0}.$$

Ainsi, il existe $g^* \in {}^* G$ tel que $\nu(g^*) = {}^* \lambda(e)$.

On veut maintenant prouver que $q(g^*) = {}^* \tilde{\omega}(c)$. Remarquons pour cela que (p, p') est le pullback de (η, \tilde{r}) , et cela va nous permettre de montrer l'existence de $p^* \in {}^* P$ tel que $p(p^*) = {}^* c$, $p'(p^*) = {}^* e$. En effet, la pseudo-égalité et les propriétés du pullback nous donnent la construction du diagramme commutatif 29. Ainsi, composant par 1_Y qui est un épimorphisme, on obtient les pseudo-égalités recherchées.

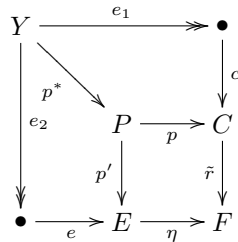


Diagramme 28: Lemme du serpent : action de $\tilde{\omega}$.

Et donc,

$$\begin{aligned}
s \circ \tilde{\omega}(c) &=^* s \circ \tilde{\omega} \circ p(p^*) \\
&=^* s' \circ \lambda \circ p'(p^*) \\
&=^* s' \circ \lambda(e) \\
&=^* s' \circ \nu(g^*) \\
&=^* s \circ q(g^*).
\end{aligned}$$

Or, s est un monomorphisme et donc $q(g^*) =^* \tilde{\omega}(c)$. On remarque de plus que ce résultat ne dépend pas des morphismes choisis pour construire g^* .

Chassons maintenant dans le diagramme 27 pour montrer que $(\beta_1, \tilde{\omega})$ est une suite exacte. Dans ce but, nous allons utiliser la proposition 3.38 page 32.

Soit donc $b \in^* B$ et choisissons $e = \delta(b) \in^* E$. on a bien que $\eta(e) = \beta_1(b)$ et par conséquent le morphisme g^* donné par la construction précédente vérifie $q(g^*) =^* \tilde{\omega}(\beta_1(b))$. Or, celui-ci vérifie aussi $\nu(g^*) =^* \lambda(e) = \lambda \circ \delta(b) = \mathbf{0}$. De plus, ν est un monomorphisme et donc $g^* =^* \mathbf{0}$. Par conséquent $\tilde{\omega}(\beta_1(b)) =^* \mathbf{0}$.

Soit maintenant $c \in^* \tilde{R}$ tel que $\tilde{\omega}(c) =^* \mathbf{0}$. Alors le morphisme g^* fourni par la description de l'action de $\tilde{\omega}$ est tel que $q(g^*) =^* \mathbf{0}$. De plus, si $y = \ker(z)$ alors (y, z) forme une suite exacte. En effet, dans ce cas $\text{im}(y) = y$, par la proposition 3.24, page 27. Par dualité, si $z = \text{coker}(y)$, (y, z) forme aussi une suite exacte. Ainsi (g, q) est une suite exacte et donc il existe $i \in^* I_\zeta$ tel que $g(i) =^* g^*$. Alors

$$\lambda(e) =^* \nu \circ g^* =^* \nu \circ g(i) =^* \lambda \circ \zeta(i).$$

En utilisant la proposition 3.39 page 33, on trouve l'existence de $e' \in^* E$ tel que $\lambda(e') =^* \mathbf{0}$, et pour tout morphisme $\vartheta : E \rightarrow \Theta$, $\vartheta(\zeta(i)) =^* \mathbf{0}$ implique $\vartheta(e') = \vartheta(e)$. En particulier, $\eta(e') = \eta(e)$. Puisque $\lambda(e') =^* \mathbf{0}$, on obtient l'existence de $b \in^* B$ tel que $\delta(b) =^* e'$. Ainsi, $\tilde{r} \circ \beta_1(b) =^* \eta(e') =^* \eta(e) =^* \tilde{r} \circ c$, et donc, puisque \tilde{r} est un monomorphisme, $\beta_1(b) =^* c$. Par conséquent la suite $(\beta_1, \tilde{\omega})$ est exacte.

Soit $\beta_1 = m \circ e$ la factorisation à travers l'image de β_1 . Alors, puisque β_2 est un isomorphisme, $\beta = (\beta_1 \circ m) \circ e$ est la factorisation à travers l'image de β . Ainsi $\text{im}(\beta) = \text{im}(\beta_1)$. De plus, $\ker(\tilde{\omega} \circ \beta_2^{-1}) = \ker(\tilde{\omega})$, et donc la suite (β, ω) est exacte.

- (v) Montrons enfin l'unicité de ω . Pour cela factorisons le par l'image. Ainsi, il existe m et e des morphismes tels que $\omega = m \circ e$. De plus, puisque la suite (β, ω, τ) est exacte, $\ker(\tau) = m$ et par dualité $\text{coker}(\beta) = e$. Ainsi, le choix de ω pour rendre la suite exacte est unique.

□

5 Bibliographie

Références

- [1] Francis BORCEUX, *Handbook of Categorical Algebra 1*, Cambridge University Press, 1994.
- [2] Francis BORCEUX, *Handbook of Categorical Algebra 2*, Cambridge University Press, 1994.
- [3] Saunders MAC LANE, *Categories for the Working mathematician*, Springer, Deuxième édition (1998).
- [4] Andrew ARCHIBALD, *PlanetMath : universe*, <http://planetmath.org/encyclopedia/Universe.html>, 24.04.2009.

- [5] The Unapologetic Mathematician, *Short Exact Sequences*,
<http://unapologetic.wordpress.com/2007/09/27/short-exact-sequences/>,
03.05.2009.