Quadrature n° 108 (2018) 43-46

Polyèdres et commensurabilité

par Rafael GUGLIELMETTI et Matthieu JACQUEMET*

Résumé.

Le but de cet article est de présenter la notion de *commensurabilité de polyèdres*. Cette notion est basée uniquement sur l'utilisation de ciseaux et de colle. Les deux premières sections sont élémentaires et servent à présenter un exemple concret et sa formalisation. Dans la dernière section, certains liens avec d'autres domaines des mathématiques sont discutés.
Cet article est une traduction abrégée du "Snapshot of Modern Mathematics MFO" [1] des mêmes auteurs.

I Mise en jambe

Ernest va faire du camping avec des amis. Sa tente a une base carrée, de côté 1.5 m et est haute de 1.5 m, selon le modèle suivant :

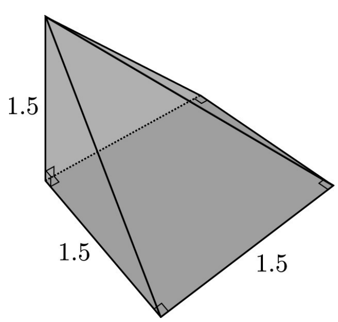

Figure 1. Tente d'Ernest

La forêt est remplie de moustiques mais, par chance, Ernest a pris avec lui deux bombes de gaz anti-moustiques. Sur la notice, il est écrit qu'une bombe suffit pour un volume de 1.2 m^3 pour une nuit. Ernest ne veut pas être mordu mais il ne souhaite pas non plus utiliser les deux bombes si cela n'est pas nécessaire. Que doit-il faire ?
Pour répondre à cette question, il suffit de calculer le volume de la tente, qui est une pyramide basée sur un carré. Sans connaître la formule par cœur, on peut déterminer le volume en remarquant que si l'on colle trois copies de la pyramide de la bonne manière, on obtient un cube de côté 1.5 m, comme l'indique la figure suivante.

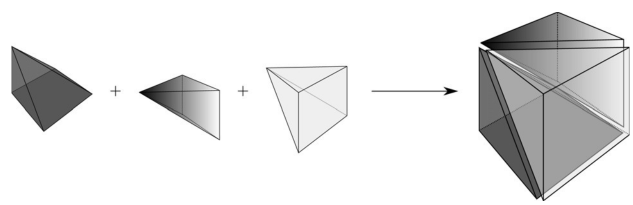

Figure 2. Trois copies de la pyramide d'Ernest combinées en un cube

Ainsi, le volume (à partir de maintenant, toujours en m^3) de la pyramide est un tiers de celui du cube, c'est-à-dire

$$\mathrm{vol}(\text{pyramide}) = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{vol}(\text{cube}) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{8} = 1.125.$$

Maintenant, Ernest connaît la réponse à sa question : en utilisant une seule des deux bombes, il sera protégé des piqûres de moustiques pendant toute la nuit !

L'exemple d'Ernest montre comment des données géométriques quantitatives (en l'occurrence, le volume) peuvent être déduites de données qualitatives (en l'occurrence, l'arrangement de copies d'une pyramide). Il s'agit de notre premier contact avec le sujet de cet article : le concept de *commensurabilité de polyèdres*.

* jacquemet.matthieu@gmail.com

II Polyèdres en kit

Un *polyèdre* de dimension 3 est une forme géométrique bornée par des polygones, appelés *faces* [1]. Les différentes faces du polyèdre sont elles-mêmes bornées par des *arêtes*, qui relient chacune deux *sommets*. N'importe quelle arête est partagée par exactement deux faces, et un sommet est contenu dans au moins trois faces et arêtes. Par exemple, la pyramide d'Ernest possède 5 faces, 8 arêtes et 5 sommets.

Considérons deux polyèdres P et Q et supposons qu'ils possèdent une face identique, disons F. En utilisant des translations, rotations et/ou des réflexions, on peut déplacer Q de manière à ce que les deux faces identiques coïncident. On appelle cette opération, et le polyèdre ainsi obtenu, le *collage* de P et Q le long de la face F. Remarquons que P et Q n'ont pas besoin d'être identiques, et que le collage le long de F ne se fait pas forcément de manière unique. De plus, P et Q peuvent même posséder plus d'une face identique et dans ce cas on doit préciser le long de quelle face on réalise le collage.
Si un plan intersecte l'intérieur d'un polyèdre P, cela détermine deux polyèdres P_1 et P_2 de telle sorte que P soit le collage de P_1 et P_2 le long de la face qu'ils ont en commun dans le plan donné. Cette opération est appelée le *découpage* de P par rapport au plan donné.
Par exemple, le cube présenté dans la figure 2 est obtenu en collant trois copies de la pyramide d'Ernest tandis que la pyramide est obtenue en découpant le cube.

Le découpage d'un polyèdre en plusieurs copies d'un même polyèdre (on dit que ces copies sont *congruentes*) n'est pas toujours unique. Par exemple, le cube de la figure 2 peut aussi être coupé en 6 pyramides :

Puisque la pyramide d'Ernest et la nouvelle pyramide ci-dessus peuvent toutes les deux être utilisées pour construire le même polyèdre (un cube), elles sont dites *commensurables*. En général, deux polyèdres P et Q sont dits commensurables s'il est possible de coller un certain nombre de copies de P, disons k, pour obtenir un polyèdre qui peut à son tour être découpé en un certain nombre de copies de Q, disons l. Dans ce cas, les nombres k et l sont des nombres entiers positifs qui peuvent être utilisés pour relier les volumes de P et Q. En effet, on a

$$k \cdot \mathrm{vol}(P) = l \cdot \mathrm{vol}(Q), \text{ i.e. } \mathrm{vol}(Q) = \frac{k}{l} \cdot \mathrm{vol}(P). \quad (\star)$$

1. Cette notion peut être étendue à un espace de dimension quelconque

Dans notre exemple, le volume de la petite pyramide est donné par

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\text{petite pyramide}) &= \frac{3}{6} \cdot \mathrm{vol}(\text{pyramide d'Ernest}) \\ &= \frac{9}{16} = 0.5625. \end{aligned}$$

La relation $(\star)$ est une condition *nécessaire* pour la commensurabilité de P et Q mais elle n'est pas *suffisante*. En d'autres termes, si $\frac{\mathrm{vol}(P)}{\mathrm{vol}(Q)} \notin \mathbb{Q}$, alors P et Q ne sont pas commensurables. Dans le cas contraire, il est possible que les deux polyèdres soient commensurables, mais on ne peut pas le décider uniquement en comparant leur volume.

III De l'autre côté du miroir

Nous avons considéré précédemment le contexte très particulier de l'espace euclidien de dimension 3 (l'espace "courant" $\mathbb{E}^3$). Cependant, la notion de commensurabilité ne dépend pas d'une dimension ou d'un espace précis. Les seules choses que l'on nécessite sont des définitions générales de polyèdres (aspect qualitatif) et de volume (aspect quantitatif). Ainsi, le concept de *commensurabilité* peut être défini dans un espace géométrique de dimension n, comme $\mathbb{S}^7$, l'*espace sphérique* de dimension 7 ou encore $\mathbb{H}^{21}$, l'*espace hyperbolique* de dimension 21 (les deux existent, indépendamment de notre capacité à nous les représenter !). Ces *espaces à courbure constante* (l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ de courbure nulle, la sphère $\mathbb{S}^n$ de courbure positive et l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ de courbure négative) sont les espaces modèles les plus importants en géométrie (voir, par exemple, le livre [6]).

Dans de tels contextes abstraits, la notion de volume peut être difficile à appréhender et à calculer. Par exemple, on ne connaît pas le volume de certains objets simples dans l'espace hyperbolique de dimension 7. La commensurabilité vient alors à notre secours : tout comme dans l'exemple de la tente d'Ernest, si on peut montrer que deux polyèdres sont commensurables, alors on sait que leurs volumes sont liés par un facteur rationnel. Ainsi, le volume peut être à la fois une fin et un moyen.

Finalement, la commensurabilité de polyèdres est connexe à un certain nombre de domaines des mathématiques et est liée à des méthodes et questions très différentes (dont certaines sont encore étudiées actuellement). Voici quelques exemples :

— Troisième problème de Hilbert : en 1900, David Hilbert a communiqué 23 problèmes à la communauté des mathématiciens. Il pensait que la résolution de ces problèmes augmenterait consi-

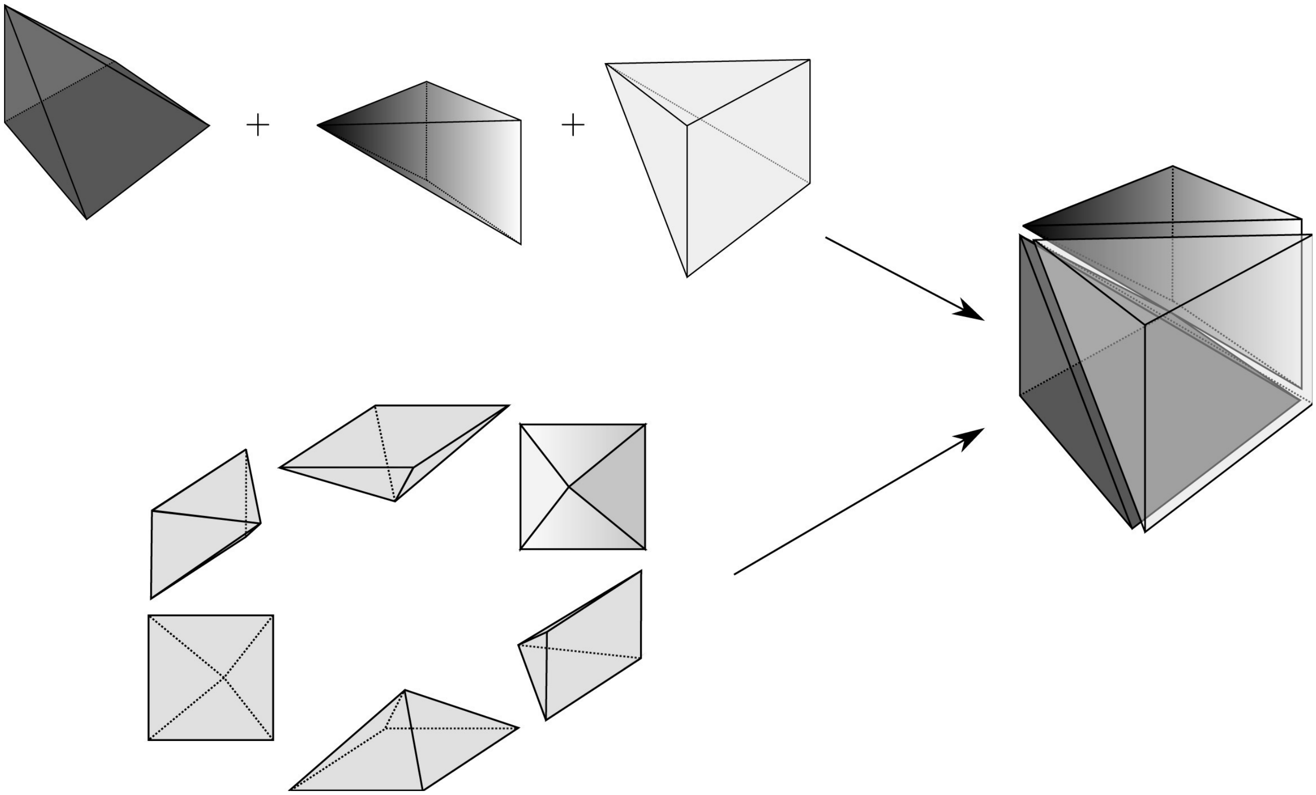

Figure 3. Deux découpages du cube.

dérablement notre compréhension des mathématiques. Le troisième problème peut être énoncé comme suit :

> *Si P et Q sont deux polyèdres de même volume dans l'espace euclidien de dimension 3, est-il possible de découper P en un nombre fini de pièces (pas forcément congruentes), puis de coller ces pièces de manière à construire Q ?*

Un étudiant de Hilbert, Max Dehn, a prouvé que la réponse à cette question est non en général. Pour réaliser cela, il a introduit une nouvelle notion qui est appelée de nos jours *l'invariant de Dehn*. Avec cet invariant, on peut prouver que le cube de côté 1 et le tétraèdre régulier (d'angle $\arccos \frac{1}{3} \approx 73°$ et) de côté $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{12}}$, bien qu'ayant le même volume, ne sont pas commensurables.

— Théorie des groupes : la classification des polyèdres en classes de commensurabilité est liée à la classification de certaines structures algébriques. Par exemple, deux sous-groupes H_1 et H_2 d'un groupe G sont dits *commensurables* si leur intersection est d'indice fini dans H_1 et H_2 (l'indice peut être différent).
La commensurabilité des groupes est liée à celle des polyèdres de la manière suivante : si $\mathbb{X}^n \in \{\mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n\}$ est un des espaces géométriques modèles, on peut associer à tout groupe discret d'isométries de $\mathbb{X}^n$ (au moins) un *polyèdre fondamental*. Dans ce cadre, de tels groupes sont commensurables si et seulement si leurs polyèdres fondamentaux associés sont commensurables.

— Algèbre : la commensurabilité des polyèdres est aussi connectée à d'autres objets algébriques, en particulier s'ils sont liés à des groupes d'isométries discrets *arithmétiques* (i.e. provenant d'une forme quadratique satisfaisant certaines bonnes propriétés). Un exemple typique est le *groupe modulaire* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Dans le cas d'un groupe d'isométries hyperbolique arithmétique, on peut associer au polyèdre fondamental une liste complète d'invariants qui nous permet de décider de la (non-)commensurabilité uniquement en comparant ces invariants. Cette liste est constituée d'un corps de nombre ainsi que d'une algèbre de Clifford et une algèbre de quaternions sur ce corps de nombres.

— Groupes de Coxeter : si dans un polyèdre l'angle entre toute paire de faces qui s'intersectent est de la forme $\frac{\pi}{k}$, $k \in \{2,\ldots,\infty\}$, alors ce polyèdre (et le groupe discret généré par les réflexions par rapport à ses faces) est appelé *polyèdre de Coxeter* (respectivement *groupe de Coxeter*). La figure 4 montre la représentation d'un groupe de Coxeter hyperbolique de dimension 3 (il s'agit en fait de l'orthoschème $[k,l,m]$).

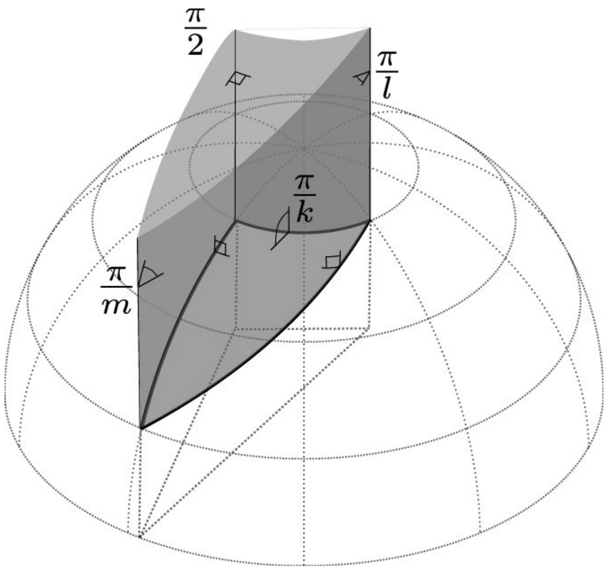

Figure 4. L'orthoschème de Coxeter hyperbolique $[k,l,m]$

Les simplexes de Coxeter hyperboliques n'existent que jusqu'à la dimension 9. Leurs volumes et leurs classes de commensurabilité ont été déterminés par Johnson, Kellerhals, Ratcliffe et Tschantz [3].

Dans un projet avec Ruth Kellerhals [2] (voir aussi [4] pour une version condensée), nous déterminons les classes de commensurabilité de toutes les pyramides hyperboliques de Coxeter à $n+2$ faces vivant dans $\mathbb{H}^n$ (de telles pyramides n'existent que jusqu'en dimension 17). Ce travail utilise certaines méthodes mentionnées ci-dessus, comme les invariants algébriques ainsi que les collages et découpages.

— Théorie des nombres : le volume des polyèdres hyperboliques de dimension 3 peut être calculé avec l'aide de la fonction de Lobachevsky $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est définie par

$$\Lambda(x) := \int_0^x \log|2\sin t|dt.$$

Cette fonction possède certaines propriétés de symétrie et est liée à d'autres objets d'intérêt pour les théoriciens des nombres, comme les *polylogarithmes* et les *fonction de Clausen* (voir par exemple [5]). La question de savoir si le rapport $\lambda := \frac{\Lambda(\pi/3)}{\Lambda(\pi/4)}$ est rationnel est actuellement une question ouverte.

Une conjecture due notamment à Chowla et Milnor, stipule que le quotient λ n'est pas rationnel. Si cette conjecture est vérifiée, deux polyèdres de volumes respectifs $\alpha \cdot \Lambda(\pi/4)$ et $\beta \cdot \Lambda(\pi/3)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ quelconques, ne sont jamais commensurables. Cela fournirait une preuve alternative du fait que les orthoschèmes de Coxeter $[3,4,4]$ et $[3,3,6]$, de volumes respectifs $\frac{1}{6} \cdot \Lambda(\frac{\pi}{4})$ et $\frac{1}{8} \cdot \Lambda(\frac{\pi}{3})$, ne sont pas commensurables (voir [3]).

Références

[1] R. Guglielmetti and M. Jacquemet. Polyehdra and commensurability. *Snapshots of modern mathematics MFO Oberwolfach*, 2016(9) : 1–13, 2016.

[2] R. Guglielmetti, M. Jacquemet, and R. Kellerhals. On commensurable hyperbolic Coxeter groups. *Geom. Dedicata*, 183 : 143–167, 2016.

[3] N.W. Johnson, R. Kellerhals, J.G. Ratcliffe, and S.T. Tschantz. Commensurability classes of hyperbolic Coxeter groups. *Linear algebra and its applications*, 345(1) : 119–147, 2002.

[4] R. Kellerhals. Commensurability of hyperbolic Coxeter groups. *MFO reports*, 38 : 29–32, 2014.

[5] J. Milnor. On polylogarithms, Hurwitz zeta functions, and the Kubert identities. *Enseign. Math.(2)*, 29(3-4) : 281–322, 1983.

[6] J.G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.